

CÓMPUTO POR COMPONENTES DEL ERROR INTRODUCIDO POR SEÑALES PWM EN SISTEMAS LTI

Ernesto Kofman ^{*,2} Fernando Fontenla ^{*,1}
Hernán Haimovich ^{*,2}

** CIFASIS-CONICET y Laboratorio de Sistemas Dinámicos,
Departamento de Electrónica. FCEIA - Universidad Nacional de
Rosario (UNR). Riobamba 245 bis - (2000) Rosario
kofman,fontenla,haimo@fceia.unr.edu.ar*

Resumen: Una técnica comúnmente utilizada para la emulación de señales de variación continua a través de señales de rango discreto es la modulación de ancho de pulso (PWM). Se propone un novedoso método de cómputo del error introducido al excitar un sistema lineal mediante una señal PWM. El método es sistemático y no requiere la simplificación del modelo del circuito eléctrico al cual se le aplica la señal PWM, a diferencia de los métodos más usuales empleados en dicho cálculo. Adicionalmente, el método permite obtener simultáneamente cotas para el error introducido en cada variable de estado del sistema.

Palabras Claves: Modulación de ancho de pulso (PWM), cotas por componentes, sistemas perturbados

1. INTRODUCCIÓN

La modulación de ancho de pulso (PWM, según su sigla en inglés) es una técnica ampliamente utilizada cuando se requiere transmitir información analógica mediante una señal digital que sólo puede asumir un número finito y reducido de valores. Esta técnica es usualmente aplicada en sistemas de comunicación digital y control de circuitos de electrónica de potencia (Holtz, 1994).

En los sistemas de comunicación digital, una señal que fue modulada mediante PWM es recuperada mediante el filtrado pasa-bajos de la señal modulada. El funcionamiento de muchos sistemas de electrónica de potencia puede interpretarse como resultante de la aplicación directa de una señal PWM al circuito, siendo la propia carga la que realiza el proceso de filtrado de la misma.

La excitación de un sistema mediante una señal PWM, por oposición a la aplicación directa de la

señal original sin modular, genera una diferencia entre la respuesta deseada y la respuesta real del sistema. Por ejemplo, en un sistema de control de un motor eléctrico mediante electrónica de potencia esta diferencia se manifiesta como un ripple en la corriente, es decir, como una variación de la respuesta alrededor del valor deseado. Típicamente, el análisis de un circuito excitado mediante una señal PWM es llevado a cabo mediante el uso de *modelos promediados* (Mohan *et al.*, 1995; Rashid, 1996; Erickson, 1997), los que representan el comportamiento de las variables del circuito *en promedio*. La variación alrededor de los valores promedio es en muchos casos analizada con métodos ad-hoc, que a veces utilizan aproximaciones groseras que, aunque útiles para un primer paso en el diseño y control de estos sistemas, producen resultados bastante conservadores en muchos casos. Asimismo, los resultados existentes se abocan en general al estudio de la diferencia (o ripple) en una situación de régimen Lehman and Bass (1996).

¹ Becario Conicet.

² Docente FCEIA-UNR. Investigador CONICET.

Este trabajo desarrolla un novedoso método para la estimación precisa del error introducido al excitar un sistema LTI mediante una señal PWM, cuya aplicación no está limitada a una situación de régimen. El método puede aplicarse a sistemas LTI generales sin requerir la simplificación del modelo del sistema para su aplicación. Se trata de un método sistemático, es decir, que no requiere la realización de pasos supeditados a prueba y error. El método está relacionado con las ideas de análisis por componentes desarrolladas anteriormente por los autores (Kofman, 2005; Kofman *et al.*, 2007; Haimovich *et al.*, 2007) y permite obtener simultáneamente los errores introducidos en todas las variables de estado del sistema.

2. PRELIMINARES

2.1 Breve introducción a PWM

Se considera el siguiente esquema de modulación PWM lineal. Se desea modular una señal original $o(t)$ a través de la técnica PWM. La señal $o(t)$ es muestreada regularmente con período T , y la muestra $o(t_k)$ es retenida mediante un bloqueador de orden cero generando la señal seccionalmente constante $m(t)$:

$$m(t) = o(t_k), \quad t_k \leq t < t_k + T \quad (1)$$

$$t_k = kT, \quad k = 0, 1, \dots \quad (2)$$

La señal $m(t)$ es comparada con la portadora diente de sierra $p(t)$ como muestra la Fig. 1, generando la señal modulada $p_m(t)$ que satisface:

$$p_m(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } m(t) \geq p(t) \\ -1 & \text{si } m(t) < p(t) \end{cases} \quad (3)$$

Para mantener siempre la linealidad de la modulación, se supone que $-1 \leq p(t) \leq 1$ y $-1 \leq m(t) \leq 1$.

Llamando $w_m(t)$ a la diferencia entre la señal $m(t)$ y su modulación PWM lineal $p_m(t)$:

$$w_m(t) \triangleq p_m(t) - m(t) \quad (4)$$

podemos escribir $p_m(t) = m(t) + w_m(t)$, donde $w_m(t)$ tiene las características graficadas en la Fig.2. Una característica específica de la señal de error $w_m(t)$ es que su valor medio en cualquier intervalo de la forma $[t_k, t_{k+1}]$ es nulo.

2.2 Notación

En lo que sigue, \mathbb{R} y \mathbb{C} representan los conjuntos de números reales y complejos, respectivamente. Dada una matriz M , $|M|$ y $\text{Re}(M)$ representan las matrices cuyos elementos son los módulos y la parte real, respectivamente, de cada elemento de M . Si $x(t)$ es una función vectorial, entonces

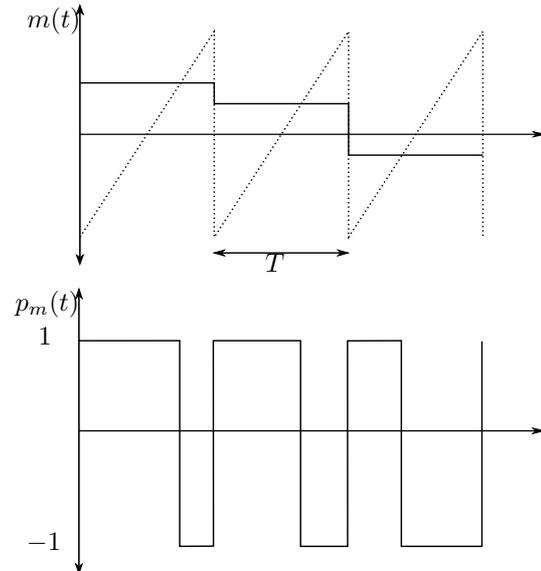


Figura 1. Arriba: señal a modular $m(t)$ (línea continua) y portadora diente de sierra (línea de puntos). Abajo: señal modulada PWM, $p_m(t)$.

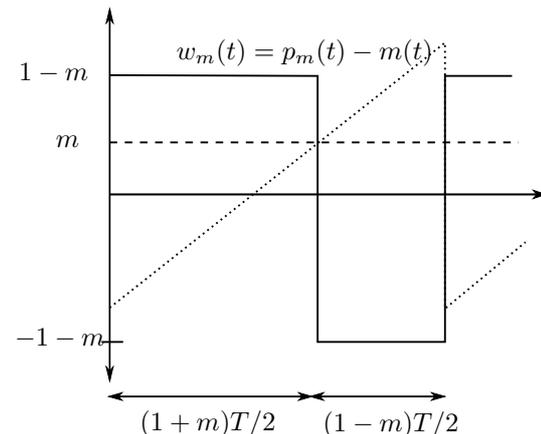


Figura 2. Portadora diente de sierra $p(t)$ (línea de puntos), señal modulante $m(t)$ (línea de trazos) y señal $w_m(t)$ (línea continua), $w_m(t) = p_m(t) - m(t)$.

$\limsup_{t \rightarrow \infty} x(t)$ representa el vector que se obtiene de aplicar $\limsup_{t \rightarrow \infty}$ a cada componente de $x(t)$, y similarmente para ‘sup’. Si $x, y \in \mathbb{R}^n$, la expresión ‘ $x \leq y$ ’ representa el conjunto de desigualdades $x_i \leq y_i$, $i = 1, \dots, n$, entre los componentes de x e y . \mathbb{R}_+ y $\mathbb{R}_{+,0}$ representan los reales positivos y no negativos, respectivamente.

Dado $T > 0$, $\mathcal{M}(T)$ representará el conjunto de señales $-1 \leq m(t) \leq 1$ seccionalmente constantes, cuyas discontinuidades ocurren únicamente en los instantes t_k definidos en (2).

3. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

Se considera un sistema al cual se desearía aplicar la señal original $o(t)$, pero al que por cuestiones

de implementación tecnológica solamente se puede aplicar la señal $p_m(t)$ resultante de la modulación PWM lineal descrita en la Sección 2 de la señal $o(t)$. El objetivo que se plantea es el de encontrar, realizando la menor cantidad posible de aproximaciones, cuál es el máximo error introducido entonces en la respuesta del sistema. Debido a que en cualquier sistema digital es inevitable el muestreo de señales, se considerará inicialmente la señal $m(t)$ como señal original a aplicar. En otras palabras, no se tendrá en cuenta inicialmente el error introducido por el muestreo sino sólo el introducido por la modulación PWM lineal.

Con este fin, se considera un sistema de la forma

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) \quad (5)$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ representa el estado en el instante t , $u(t) \in \mathbb{R}$ es la entrada, $b \in \mathbb{R}^n$, y $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es Hurwitz. Se desea estudiar la respuesta de (5) cuando la entrada u consiste en la modulación PWM lineal de una señal seccionalmente constante $m(t)$, resultante del muestreo con período T de una señal original $o(t)$, tal como fue descrito en la Sección 2.

Sea $\phi(\cdot, x_0, \nu)$ la solución de (5) con condición inicial $x(0) = x_0$ y aplicando la entrada $u(t) \equiv \nu(t)$, interesa estudiar la siguiente variable:

$$e_m(t) \triangleq \phi(t, x_0, p_m) - \phi(t, x_0, m), \quad (6)$$

con p_m y m como fue descrito en la Sección 2. Diferenciando (6) y empleando (5) resulta

$$\dot{e}_m(t) = Ae_m(t) + bw_m(t), \quad e(0) = 0, \quad (7)$$

donde w_m satisface (4).

El objetivo es, por lo tanto, encontrar una cota lo menos conservadora posible para cada componente de $e_m(t)$.

4. RESULTADO PRINCIPAL

En esta sección se brinda una solución al problema planteado en la Sección 3. Este desarrollo requiere el siguiente lema.

Lema 1. Sea el sistema escalar (complejo)

$$\dot{z}(t) = \lambda(z(t) + w_m(t)), \quad \text{con } z(0) = 0, \quad (8)$$

donde $z(t)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\text{Re}(\lambda) < 0$, $w_m(t) \in \mathbb{R}$ satisface (4) con $m \in \mathcal{M}(T)$ y siendo $p_m(t)$ el resultado de la modulación PWM lineal de $m(t)$, tal como fue explicado en la Sección 2. Definamos, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\text{Re}(\lambda) < 0$ y para todo $T \in \mathbb{R}_+$, la siguiente función:

$$\tilde{g}(\lambda, T) \triangleq \sup_{m \in \mathcal{M}(T)} \sup_{t > 0} |z(t)|. \quad (9)$$

Entonces,

$$a) \lambda_1 T_1 = \lambda_2 T_2 \Rightarrow \tilde{g}(\lambda_1, T_1) = \tilde{g}(\lambda_2, T_2).$$

b) Sea

$$g(\lambda T) \triangleq \tilde{g}(\lambda, T). \quad (10)$$

Entonces, para todo $m \in \mathcal{M}(T)$, resulta $|z(t)| \leq g(\lambda T)$.

Demostración. a) Consideremos los siguientes sistemas, donde $\lambda_1 T_1 = \lambda_2 T_2$:

$$\dot{z}_1(t) = \lambda_1(z_1(t) + w_{m_1}(t)) \quad (11)$$

y

$$\dot{z}_2(t) = \lambda_2(z_2(t) + w_{m_2}(t)), \quad (12)$$

y definamos $\tau \triangleq t\lambda_2/\lambda_1 = tT_1/T_2$ (notar que $\tau > 0$ si y sólo si $t > 0$). El sistema (12) puede reescribirse en función de τ como:

$$\frac{d\hat{z}_2(\tau)}{d\tau} = \lambda_1(\hat{z}_2(\tau) + w_{\hat{m}_2}(\tau)), \quad (13)$$

donde $\hat{z}_2(\tau) \triangleq z_2(\tau\lambda_1/\lambda_2)$ y $\hat{m}_2(\tau) \triangleq m_2(\tau\lambda_1/\lambda_2)$. Notar que $\hat{m}_2 \in \mathcal{M}(T_1)$. Entonces,

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\lambda_2, T_2) &= \sup_{m \in \mathcal{M}(T_2)} \sup_{t > 0} |z_2(t)| \\ &= \sup_{m \in \mathcal{M}(T_1)} \sup_{\tau > 0} |\hat{z}_2(\tau)| \\ &= \tilde{g}(\lambda_1, T_1) \end{aligned}$$

lo que prueba a). El item b) es consecuencia directa de la definición (9). \square

Teorema 1. Consideremos el sistema (7), donde A es Hurwitz y diagonalizable con descomposición modal $A = V\Lambda V^{-1}$ y el par (A, b) es controlable. Entonces, para cualquier $m \in \mathcal{M}(T)$ se cumple

$$|e_m(t)| \leq |V|G(\Lambda T)|\Lambda^{-1}V^{-1}b|, \quad \forall t \geq 0, \quad (14)$$

donde

$$G(\Lambda T) = \text{diag}(g(\lambda_1 T), \dots, g(\lambda_n T)), \quad (15)$$

con la función g definida en el Lema 1 en (10).

Demostración. Realizando un cambio de variables $e_m(t) = Vy(t)$, la Ec.(7) puede reescribirse como

$$\dot{y}(t) = \Lambda y(t) + V^{-1}bw_m(t). \quad (16)$$

Como Λ es diagonal, la i -ésima fila de la ecuación anterior tiene la forma

$$\dot{y}_i(t) = \lambda_i y_i(t) + (V^{-1}b)_i w_m(t). \quad (17)$$

En (17), notar que $(V^{-1}b)_i \neq 0$ para todo i debido a la controlabilidad del par (A, b) . Introduciendo un nuevo cambio de variables $z_i = (V^{-1}b)_i \lambda_i^{-1} y_i$ y reemplazando arriba, obtenemos

$$\dot{z}_i(t) = \lambda_i(z_i(t) + w_m(t)) \quad (18)$$

El Lema 1 nos garantiza entonces que $|z_i(t)| \leq g(\lambda_i T)$, y luego

$$|y_i(t)| = |(V^{-1}b)_i \lambda_i^{-1} z_i| \leq g(\lambda_i T) |\lambda_i^{-1} (V^{-1}b)_i| \quad (19)$$

Como esto se cumple para cada i , volviendo a notación vectorial resulta

$$|y(t)| \leq G(\lambda T) |\Lambda^{-1}V^{-1}b| \quad (20)$$

Finalmente,

$$|e_m(t)| = |Vy(t)| \leq |V|G(\lambda T)|\Lambda^{-1}V^{-1}b| \quad (21)$$

lo que concluye la demostración. \square

Corolario 1. Sea $\bar{g}(a)$ una función que satisfice $\bar{g}(a) \geq g(a)$ para todo a . Entonces,

$$|e_m(t)| \leq |V|\bar{G}(\Lambda T)|\Lambda^{-1}V^{-1}b| \quad (22)$$

donde

$$\bar{G}(\Lambda T) = \text{diag}(\bar{g}(\lambda_1 T), \dots, \bar{g}(\lambda_n T)) \quad (23)$$

4.1 Cálculo de la función $g(\lambda T)$

El Teorema 1 y su Corolario brindan una cota para cada componente del vector $e_m(t)$. Estas cotas dependen de la evaluación de la función g definida en (10) o de una cota superior de la misma, \bar{g} . A continuación se explica cómo obtener dichas cotas analítica o numéricamente.

De acuerdo al Lema 1 y sus definiciones (9) y (10), tenemos:

$$g(\lambda) = \bar{g}(\lambda, 1) = \sup_{m \in \mathcal{M}(1)} \sup_{t \geq 0} |z(t)|, \quad (24)$$

donde $z(t)$ es solución de (8). El procedimiento para obtener la función g o una cota superior \bar{g} será el siguiente. En primera instancia se obtendrá:

$$\sup_{m \in \mathcal{M}(1)} \sup_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}} |z(k)|, \quad (25)$$

y luego se utilizará este resultado para encontrar una cota para la función g . Una cota para (25) será obtenida en el Teorema 2. El resultado final será presentado en el Teorema 3, para el cual se requerirá el resultado preliminar Lema 2 y su Corolario 3.

Teorema 2. Sea $z(t)$ la solución del sistema escalar (8) con $T = 1$. Entonces, en los instantes $k = 0, 1, \dots$ se cumple

$$|z(k)| \leq \bar{z}_\lambda \triangleq \sup_{-1 < m_k < 1} \zeta_\lambda(m_k) \quad (26)$$

donde

$$\zeta_\lambda(m_k) \triangleq \left| \frac{e^\lambda(1 - m_k) - 2e^{\lambda \frac{1-m_k}{2}} + 1 + m_k}{1 - |e^\lambda|} \right|.$$

Demostración. Definiendo $m_k \triangleq m(k)$, $z_k \triangleq z(k)$, y $d(m_k) \triangleq (1 + m_k)/2$ (ver Fig. 2), la Ec.(8) tiene la siguiente solución:

$$z(k+t) = e^{\lambda t} z_k + (e^{\lambda t} - 1)(1 - m_k) \quad (27a)$$

para $0 < t \leq d(m_k)$, y

$$z(k+t) = e^{\lambda(t-d(m_k))} z(d(m_k)) + (e^{\lambda(t-d(m_k))} - 1)(-1 - m_k) \quad (27b)$$

para $d(m_k) < t \leq 1$. Definiendo

$$\gamma_\lambda(m_k) \triangleq e^\lambda(1 - m_k) - 2e^{\lambda(1-\tau(m_k))} + 1 + m_k \quad (28)$$

la solución en $k+1$ puede escribirse como:

$$z_{k+1} = e^\lambda z_k + \gamma_\lambda(m_k) \quad (29)$$

de donde

$$|z_{k+1}| \leq |e^\lambda| \cdot |z_k| + |\gamma_\lambda(m_k)| \quad (30)$$

Tomando entonces

$$\bar{\gamma}_\lambda \triangleq \sup_{-1 < m_k < 1} |\gamma_\lambda(m_k)| \quad (31)$$

y teniendo en cuenta que $\text{Re}(\lambda) < 0$ y $z(0) = 0$, resulta

$$|z_k| \leq \frac{\bar{\gamma}_\lambda}{1 - |e^\lambda|} \quad \forall k \quad (32)$$

Reemplazando con la Ec.(31) y la (28) en esta última ecuación, se completa la demostración del teorema. \square

El Teorema 2 permite obtener una cota para $|z(t)|$ en los instantes $t_k = kT$ resolviendo un problema simple de optimización dado por la Ec.(26). En el caso en que $\lambda \in \mathbb{R}$, este problema puede resolverse analíticamente, derivando la expresión de $\zeta_\lambda(m_k)$ respecto a m_k e igualando a cero. El resultado se resume en el siguiente corolario:

Corolario 2. La función \bar{z}_λ del Teorema 2 cuando $\lambda \in \mathbb{R}$ puede calcularse como:

$$\bar{z}_\lambda = \frac{|e^\lambda(1 - \bar{m}) - 2e^{\lambda \frac{1-\bar{m}}{2}} + 1 + \bar{m}|}{1 - |e^\lambda|} \quad (33)$$

con

$$\bar{m} = 1 - \frac{2 \log\left(\frac{e^\lambda - 1}{\lambda}\right)}{\lambda} \quad (34)$$

Hasta aquí tenemos una serie de resultados que nos permiten calcular una cota superior para la evolución de $|z(t)|$ en los instantes $t_k = kT = k$. El Lema 2 y su Corolario 3 presentados a continuación son necesarios para derivar la cota de la función g requerida.

Lema 2. Sea $z^0(t_k+t)$ la respuesta del sistema (8) a partir de la condición $z^0(t_k) = 0$ cuando la señal de entrada es $m(t_k+t) = m_k$ ($-1 < m_k < 1$) para $0 \leq t < T = 1$. Supongamos además que

$$\bar{t} \triangleq \arg \sup_{0 < t < T} |z^0(t_k+t)| < d(m_k) \triangleq \frac{1 + m_k}{2} \quad (35)$$

Entonces, existe un valor $\tilde{m}_k \in (-1, 1)$ tal que la correspondiente respuesta $\tilde{z}^0(t_k+t)$ con $\tilde{z}^0(t_k) = 0$ verifica

$$\sup_{0 < t < T} |z^0(t_k+t)| = |z^0(t_k+\tilde{t})| < \sup_{0 < t < T} |\tilde{z}^0(t_k+t)| \quad (36)$$

Demostración. Sea $\tilde{m}_k = 2\bar{t} - 1$. Notar que $-1 < \tilde{m}_k < 1$ y que $\tilde{m}_k < m_k$. De acuerdo a la Ec.(27), la respuesta a m_k entre t_k y $t_k + d(m_k)$ es

$$z^0(t_k + t) = (e^{\lambda t} - 1)(1 - m_k) \quad (37)$$

mientras que la respuesta a \tilde{m}_k entre t_k y $t_k + \bar{t}$ verifica

$$\tilde{z}^0(t_k + t) = (e^{\lambda t} - 1)(1 - \tilde{m}_k) \quad (38)$$

Luego, $|z^0(t_k + \bar{t})| < |\tilde{z}^0(t_k + \bar{t})|$ lo que demuestra la validez de la Ec.(36) \square

Una consecuencia de este lema es que el supremo de la respuesta forzada $|z_k^0(t)|$ en un período sobre todos los posibles valores de m_k puede obtenerse buscando sólo entre $d(m_k)$ y $T = 1$. Dicho resultado se resume en el siguiente corolario:

Corolario 3. Para $0 \leq t < 1$, sea $z_{m_k}^0(t_k + t)$ la solución de (8) con $m(t_k + t) = m_k$ y $z_{m_k}^0(t_k) = 0$. Luego,

$$\begin{aligned} \bar{z}_\lambda^0 &\triangleq \sup_{-1 < m_k < 1} \sup_{0 < t < 1} |z_{m_k}^0(t + t_k)| \\ &= \sup_{-1 < m_k < 1} \sup_{d(m_k) \leq t < 1} |z_{m_k}^0(t_k + t)| \end{aligned} \quad (39)$$

donde,

$$z_{m_k}^0(t_k + t) = e^{\lambda t}(1 - m_k) - 2e^{\lambda(t - d(m_k))} + 1 + m_k \quad (40)$$

Luego, la cota superior de la respuesta forzada $z^0(t_k + t)$ puede obtenerse resolviendo otro problema simple de optimización.

De nuevo, en el caso real el problema se simplifica, como muestra el siguiente lema.

Lema 3. Sea \bar{z}_λ^0 definido como en la Ec.(39) con $\lambda < 0 \in \mathbb{R}$. Luego,

$$\bar{z}_\lambda^0 = \sup_{-1 < m_k < 1} |(e^{\lambda d(m_k)} - 1)(1 - m_k)| \quad (41)$$

Demostración. La derivada de la Ec.(40) respecto a t no tiene raíces reales. Luego, los máximos y mínimos ocurren en los extremos del intervalo, esto es, en $t = d(m_k)$ y en $t = 1$. Analizando ambos valores, el máximo de $|z_{m_k}^0|$ siempre ocurre en $t = d(m_k)$. Reemplazando entonces $t = d(m_k)$ se obtiene la expresión de la Ec.(41) \square

Por último, el siguiente Teorema brinda una expresión para la función \bar{g} .

Teorema 3. Sea $z(t)$ solución de (8). Sea \bar{z}_λ definida como en la Ec.(26) y \bar{z}_λ^0 definido como en la Ec.(39). Luego,

$$|z(t)| \leq \bar{z}_\lambda + \bar{z}_\lambda^0 \quad (42)$$

para todo $t \geq 0$ y para cualquier trayectoria $m \in \mathcal{M}$.

Demostración. La respuesta $z(t_k + t)$ para cualquier t_k , con $0 < t < T = 1$ puede descomponerse como

$$z(t_k + t) = z(t_k)e^{\lambda t} + z_{m_k}^0(t_k + t) \quad (43)$$

donde $z(t_k)e^{\lambda t}$ es la respuesta a la condición inicial $z(t_k)$ con entrada nula (respuesta libre) y $z_{m_k}^0(t_k + t)$ es la respuesta a la entrada $m(t_k + t) = m_k$ a partir de $z_{m_k}^0(t_k) = 0$ (respuesta forzada).

Entonces,

$$|z(t_k + t)| \leq |z(t_k)e^{\lambda t}| + |z_{m_k}^0(t_k + t)| \quad (44)$$

Teniendo en cuenta que $\Re(\lambda) < 0$, y aplicando el Teorema 2 resulta

$$|z(t_k)e^{\lambda t}| \leq |z(t_k)|e^{\lambda t} \leq |z(t_k)| \leq \bar{z}_\lambda \quad (45)$$

Por otro lado, de la Ec.(39) sabemos que

$$|z_{m_k}^0(t_k + t)| \leq \bar{z}_\lambda^0 \quad (46)$$

Entonces,

$$|z(t_k + t)| \leq \bar{z}_\lambda + \bar{z}_\lambda^0 \quad (47)$$

lo que completa la demostración. \square

La consecuencia de este análisis es que obtuvimos una cota superior para la función $g(\lambda T)$ (con $T = 1$), de la forma:

$$\bar{g}(\lambda) \triangleq \bar{z}_\lambda + \bar{z}_\lambda^0 \quad (48)$$

y una serie de herramientas para simplificar los problemas de optimización vinculados al cálculo de \bar{z}_λ y \bar{z}_λ^0 .

4.2 Tabulación de la función $g(\lambda T)$

La función $g(\lambda T)$ (o su cota superior $\bar{g}(\lambda T)$) puede ser previamente tabulada, sin necesidad de resolver las optimizaciones cada vez que se desee utilizar la metodología presentada.

Podemos observar en la Fig.3 la gráfica de la función $\bar{g}(\lambda T)$, calculada siguiendo la metodología del apartado anterior. Los valores fueron calculados sobre el plano complejo λT con $\Re(\lambda T) < 0$ y $\Im(\lambda T) > 0$, ya que será simétrica evaluada en los conjugados.

La Fig.4 muestra la gráfica de $\bar{g}(\lambda T)$ para $\lambda T \in \mathbb{R}$. Podemos observar que $\bar{g}(\lambda T) \rightarrow 2$ cuando $\lambda T \rightarrow -\infty$.

4.3 Presencia de perturbaciones adicionales

En presencia de otros términos de perturbación aditivos, los resultados del Teorema 1 pueden combinarse con los del método desarrollados en (Kofman, 2005) explotando la linealidad del sistema.

El procedimiento consiste simplemente en estimar la cota de error debido a cada perturbación y luego sumar las cotas obtenidas.

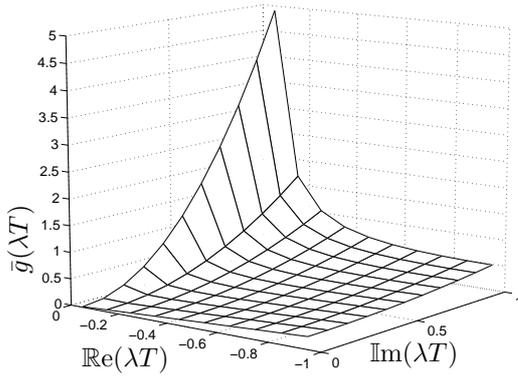


Figura 3. $\bar{g}(\lambda T)$ en el plano complejo

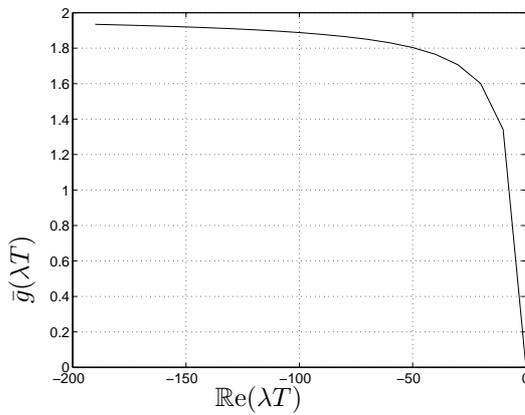


Figura 4. $\bar{g}(\lambda T)$ sobre el eje real

Por ejemplo, si queremos tener en cuenta el error debido al PWM respecto de la trayectoria con la señal original $o(t)$, podemos calcular en primer lugar el error debido a la perturbación $o(t) - m(t)$ usando el método de (Kofman, 2005) y luego calcular el error de la modulación PWM siguiendo el Teorema 1. Por último, la suma de ambos errores nos dará una cota del error total debido al PWM.

5. EJEMPLO

Para ilustrar el uso de la metodología desarrollada, estimaremos el error en la velocidad y la corriente de un motor de corriente continua (MCC) con excitación constante a lazo abierto al alimentarlo con una señal PWM.

El modelo matemático en ecuaciones de estado es el que sigue,

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\frac{b}{J}x_1 - \frac{k}{J}x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{k}{L}x_1 - \frac{R}{L}x_2 + \frac{h}{L}u\end{aligned}$$

donde x_1 representa la velocidad angular, x_2 la corriente de armadura, y u es la entrada. Los parámetros (correspondientes a un motor real)

son $J = 15kgm^2$, $b = 1,1Nms$, $R = 0,05\Omega$, $L = 3mHy$, $k = 5,12Nm/A$ y $h = 460$.

Tenemos entonces,

$$A = \begin{bmatrix} -0,0733 & 0,3413 \\ -1706,7 & -16,667 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ -153333 \end{bmatrix} \quad (49)$$

siendo los autovalores correspondientes $\lambda_{1,2} = -8,37 \pm 22,665i$.

El periodo de muestreo de la señal moduladora $o(t)$, para obtener la señal $m(t)$ como en (1), será $T = 1ms$.

Aplicaremos entonces el Corolario 1 del Teorema 1 para estimar la cota del error.

Las matrices Λ y V resultan,

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -8,37 + 22,665i & 0 \\ 0 & -8,37 - 22,665i \end{bmatrix}, \\ V = \begin{bmatrix} -0,0049 - 0,0133i & -0,0049 + 0,0133i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Para calcular $\bar{G}(\Delta T)$ debemos computar sus componentes de la diagonal $\bar{g}(\lambda_1 T)$, y $\bar{g}(\lambda_2 T)$ (que son idénticos ya que los autovalores son conjugados). Estos cálculos se pueden realizar a partir del Teorema 3 y los resultados anteriores de la sección correspondiente.

Tomando entonces $\lambda = \lambda_1 T$, comenzamos por el cálculo de la cota en los instantes de muestreo \bar{z}_λ . De la optimización que se indica en la Ec.(26) en el Teorema 2, resulta,

$$\bar{z}_\lambda = 0,01743 \quad (50)$$

para $m_k = 7,00314 \cdot 10^{-4}$.

Luego, del Lema 2 y el Corolario 3 podemos obtener, resolviendo el problema de optimización planteado en la Ec.(39), la cota \bar{z}_λ^0 , resultando,

$$\bar{z}_\lambda^0 = 0,01205 \quad (51)$$

para $m_k = -0,0010497$ en $\bar{t} = 0,49947$.

El valor m_k determina el voltaje de alimentación del MCC, por ende el punto de operación para una carga fija. Es decir, para $m_k = 1$ obtenemos $u = 460v$, o sea, régimen nominal para una carga nominal, y para $m_k = -1$, $u = 0$, en régimen el motor parado.

De la Ec.(50) y la Ec.(51), aplicando Ec.(48), obtenemos,

$$\bar{g}(\lambda_1 T) = \bar{g}(\lambda) = 0,02949 \quad (52)$$

Para $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$, como dijimos antes, se encuentran los mismos valores, resultando entonces,

$$\bar{G}(\Delta T) = \begin{bmatrix} 0,02949 & 0 \\ 0 & 0,02949 \end{bmatrix} \quad (53)$$

Aplicando la (7) del Corolario 1, obtenemos

$$|e(t)| \leq \begin{bmatrix} 2,8186 \\ 199,30 \end{bmatrix} \quad (54)$$

que es una cota superior del error por componentes debido a la modulación PWM.

De la simulación del sistema, con y sin PWM, obtuvimos el error en la velocidad angular, que se observa en la Fig.5 y el error en la corriente de armadura, graficado en la Fig.7. El sistema se simuló con una señal $o(t)$ constante de valor $o(t) = m(t) = 7,00314 \cdot 10^{-4}$ (para este valor el error en los instantes t_k resulta máximo). Como puede observarse, los valores teóricos de error no son sobrepasados jamás.

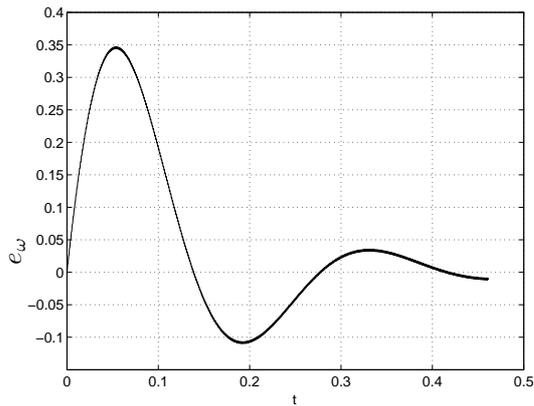


Figura 5. Error en la velocidad angular provocado por la modulación PWM

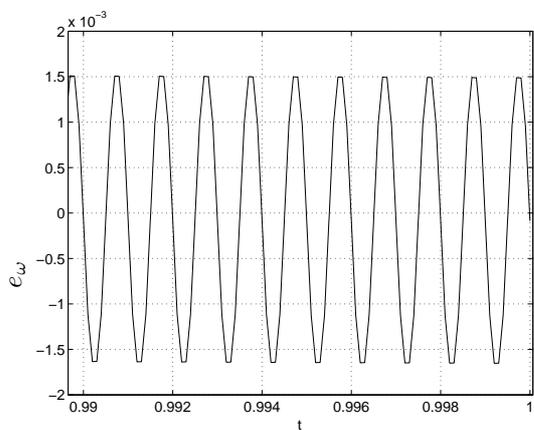


Figura 6. Detalle del error en régimen en la velocidad angular(riple)

Cabe señalar que la cota teórica resulta algo conservadora respecto a los resultados observados. Hay aquí tres motivos: en primer lugar no estamos utilizando la función $g(\lambda T)$, sino una cota superior de la misma, $\bar{g}(\lambda T)$. En segundo lugar, el método que transforma las cotas escalares en cotas vectoriales (esto es, el Teorema 1), es de por sí algo conservador. Por último, la cota teórica es válida para cualquier trayectoria $m(t) \in \mathcal{M}(T)$. Por lo tanto, es posible que existan trayectorias de entrada para las cuales la cota de error sea mayor que la trayectoria utilizada en la simulación.

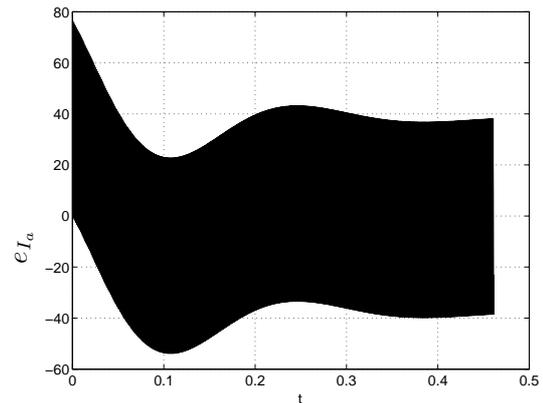


Figura 7. Error en la corriente de armadura provocado por la modulación PWM

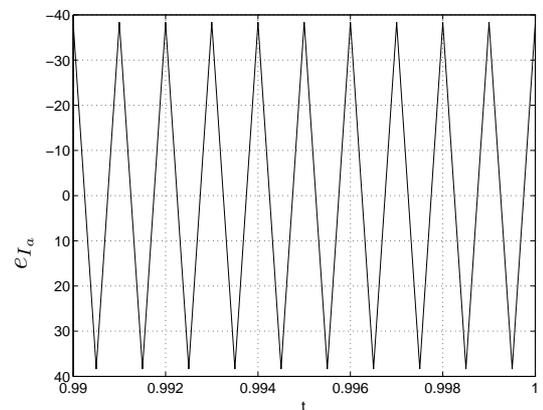


Figura 8. Detalle del error en régimen en la corriente de armadura(ripple)

6. CONCLUSIONES

Se desarrolló un método para acotar el error introducido por la modulación PWM en sistemas lineales y estacionarios. El método es muy simple, totalmente sistemático y tiene la ventaja de brindar una cota para cada variable de estado. Al no realizar simplificaciones sobre el sistema original, las cotas brindadas por el método están garantizadas bajo cualquier situación de operación. Como contrapartida, los resultados pueden ser algo conservadores.

Además del método en sí, se presentó una metodología para resolver los problemas de optimización asociados al mismo, que resultan en una estima de una cota superior para la función que limita el error en los sistemas escalares.

El trabajo futuro en esta línea estará orientado a combinar este método con los resultados de (Kofman *et al.*, 2007) para abarcar los casos en que las perturbaciones dependen del estado (lo que permite su aplicación en sistemas no lineales). También se estudiará la aplicación del método para el diseño de control con garantía de cota final, siguiendo lo hecho en (Kofman *et al.*, 2008b) para

sistemas lineales y lo de (Kofman *et al.*, 2008a) para sistemas no lineales.

Se trabajará también en reducir el conservadurismo de la metodología, mejorando en lo posible la cota superior $\bar{g}(\lambda T)$ y optimizando el método para algunos casos especiales. Teniendo en cuenta que la principal aplicación del método es en el control de motores y en fuentes de potencia, se buscará explotar la estructura de dichos modelos para optimizar las cotas obtenidas.

REFERENCIAS

- Erickson, R.W. (1997). *Fundamentals of power electronics*. Kluwer Academic Publishers.
- Haimovich, H., E. Kofman and M. M. Seron (2007). Systematic ultimate bound computation for sampled-data systems with quantization. *Automatica* **43**(6), 1117–1123.
- Holtz, Joachim (1994). Pulsewidth modulation for electronic power conversion. *Proc. of the IEEE* **82**(8), 1194–1214.
- Kofman, E. (2005). Non conservative ultimate bound estimation in LTI perturbed systems. *Automatica* **41**(10), 1835–1838.
- Kofman, E., F. Fontenla, H. Haimovich and M. Seron (2008a). Control design with guaranteed ultimate bound for feedback linearizable systems. Aceptado en IFAC World Congress 2008.
- Kofman, E., H. Haimovich and M. M. Seron (2007). A systematic method to obtain ultimate bounds for perturbed systems. *International Journal of Control* **80**(2), 167–178.
- Kofman, E., M. Seron and H. Haimovich (2008b). Control design with guaranteed ultimate bound for perturbed systems. *Automatica*. In Press.
- Lehman, B. and R.M. Bass (1996). Recent advances in averaging theory for PWM DC-DC converters. In: *Proc. 35th IEEE Conf. on Decision and Control, Kobe, Japan*. pp. 4467–4471.
- Mohan, N., T.M. Undeland and W.P. Robbins (1995). *Power electronics: converters, applications and design*. 2nd ed.. John Wiley & Sons, Inc.
- Rashid, M. H., Ed. (1996). *Recent developments in power electronics*. Institute of Electrical and Electronics Engineers, NJ, USA.