Trabajo práctico n° 8: Teoría espectral de operadores

1. Sea A un operador lineal arbitrario en un espacio complejo de dimensión finita n. Muestre que el espectro completo consiste de autovalores, los que forman un conjunto finito de a lo sumo n elementos.

2. Sea $T : H \to H$. Consideremos la ecuación de autovalores $Tx = \lambda x$, $x \neq 0, \lambda \in \mathbb{C}$. Demuestre las siguientes propiedades:

   a) si T es hermítico entonces $\lambda \in \mathbb{R}$.

   b) Si T es normal entonces $T^\dagger x = \lambda^* x$. Muestre que si T es normal entonces $(T - \lambda I)$ es normal.

   c) si T es una isometría entonces $|\lambda| = 1$.

3. Sea A un operador lineal y acotado en un espacio de Hilbert H y sea λ un autovalor de A. Demuestre que el subespacio vectorial generado por los autovectores correspondientes al autovalor λ es cerrado.

4. Pruebe que todos los autovalores de un operador hermítico son reales, y que los autovectores correspondientes a distintos autovectores son ortogonales.

5. Sea T un operador hermítico en un espacio de Hilbert H, $\lambda = \nu + i\mu$ con ν y μ reales. Pruebe la siguiente desigualdad

$$\|(T - \lambda)x\| \geq |\mu|\|x\|, \quad \forall x \in H.$$

   Concluya entonces que si $\mu \neq 0$ entonces $R(T - \lambda)$ es un subespacio cerrado de H, y de hecho vale $R(T - \lambda) = H$.

6. Un operador acotado T en un espacio de Hilbert H es *normal* si conmuta con su adjunto, $TT^\dagger = T^\dagger T$. Cada operador hermítico es obviamente normal.

   a) Demuestre que si la función $K(x, y)$ satisface la condición $K(x, y) = K(y, x)^*$, entonces para cualquier real c, el operador $F(u) = cu + i \int_a^b K(x, y)u(y)dy$ en el espacio de Hilbert complejo $L_2(a, b)$ es normal.

   b) Muestre que si B y C son operadores hermíticos que conmutan, entonces $B + iC$ es normal.

   c) Pruebe que si A es un operador normal, entonces existen dos operadores hermíticos B y C que conmutan tales que $A = B + iC$.

7. Use el último resultado del problema anterior junto con el teorema de los operadores que conmutan para demostrar que un operador normal compacto tiene un conjunto completo de autovectores ortogonales.

8. *a*) Sea $\{e_n\}$ una base ortonormal en H. Un operador $U : H \to H$ lineal y continuo es unitario si y sólo si $\{U(e_n)\}$ es también una base ortonormal de H.
   Los operadores unitarios pueden ser usados para transformar de una base de un espacio de Hilbert a otra, de la misma manera que las rotaciones en $\mathbb{R}^3$ transforman de un sistema de ejes a otro.

   b) Demuestre además que todos los autovalores de un operador unitario tienen módulo 1 y que autovectores correspondientes a distintos autovalores son ortogonales.

9. Sea $T : l_2 \to l_2$ el operador $T(x_1, x_2, \cdots) = (0, x_1, x_2/2, x_3/3, \cdots)$. Calcule su operador adjunto y demuestre que el operador no tiene autovalores.

10. Sea H un espacio de Hilbert separable, con base ortonormal $\{e_n\}_{n=0}^\infty$ y sea A el operador destrucción de la teoría cuántica definido mediante $A(e_0) = 0$, $A(e_k) = \sqrt{k} e_{k-1}$, $k \geq 1$. Muestre que cada número complejo es un autovalor de A (este es un buen ejemplo de espectro puntual que no es discreto) . Determine los autovectores y la degeneración de los autovalores.

11. Sea H un espacio de Hilbert separable y definamos el operador A mediante

$$A(e_k) = \frac{1}{k} e_{k-1}, \quad (k \geq 2), \quad A(e_1) = 0.$$

   a) Pruebe que A es compacto.

   b) Analice el espectro de A y demuestre que el único autovalor es 0.

12. Sea A un operador compacto hermítico. Sea $\{v_1, v_2, \cdots\}$ la sucesión ortonormal de autovectores correspondientes a la sucesión $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots$ de autovalores no nulos. Demuestre que

$$|\lambda_k| = \text{máx} \frac{\|A(x)\|}{\|x\|},$$

   donde el máximo está tomado para todos aquellos $x \neq 0$ tal que $(x, v_1) = (x, v_2) = \cdots = (x, v_{k-1}) = 0$ El máximo se obtiene para $x = v_k$. Este teorema puede ser usado para calcular autovalores mediante un principio variacional.

13. Sea $K \in L_2([a,b] \times [a,b])$, es decir $\int_a^b \int_a^b |K(x,y)|^2 dxdy < \infty$. Llamamos operador integral de Hilbert-Schmidt de núcleo K a $T : L_2(a,b) \to L_2(a,b)$ definido mediante

$$T(f) = \int_a^b K(x,y) f(y) dy.$$

   a) Demuestre que T está bien definido (Use el teorema de Fubini y la desigualdad de Holder), es lineal y continuo.
   Puede demostrarse que el operador integral de Hilbert-Schmidt es siempre compacto.

   b) Encuentre el operador adjunto a T.

   c) Sea $H = L_2(0,\pi)$ y T el operador integral de Hilbert-Schmidt de núcleo $K(x,y) = \cos(x+y)$. Encuentre los autovalores y los correspondientes autovectores normalizados de T. Ayuda: $e_k(x) = (1/\sqrt{\pi}) e^{i2kx}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ es una base ortonormal para $L_2(0,\pi)$.

14. Sea $T : L_2(a,b) \to L_2(a,b)$ el operador integral de Hilbert-Schmidt con núcleo K tal que $K(x,y) = K^*(y,x)$, sean λ_i y ϕ_i sus autovalores y autovectores respectivamente. Demuestre que

$$K(x,y) = \sum_i \lambda_i \phi_i(x) \phi_j^*(y).$$

   Demuestre además que

$$\int_a^b \int_a^b |K(x,y)|^2 dxdy = \sum_i |\lambda_i|^2.$$