MATEMÁTICA APLICADA 2 Segundo cuatrimestre 2014

Licenciatura en Física, Universidad Nacional de Rosario

Trabajo práctico n° 7: Operadores en espacios de Hilbert

1. Sea T un operador lineal y continuo en el espacio de Hilbert H. Definimos rango y núcleo de T de la manera usual $R(T) = \{T(x) : x \in H\}$ y $N(T) = \{x \in H : T(x) = 0\}$. Pruebe que $N(T)$ es un subespacio vectorial cerrado de H y $R(T)$ es un subespacio vectorial de H, y que $[R(T)]^\perp = N(T^\dagger)$.

2. Si P_1 y P_2 son proyectores, demuestre que $P_1 P_2$ es un proyector si y sólo si P_1 y P_2 conmutan. En este caso, pruebe que $P_1 + P_2$ no es un proyector al menos P_1 y P_2 sean ortogonales, pero $P_1 + P_2 - P_1 P_2$ es siempre un proyector si P_1 y P_2 conmutan. Determine el rango de $P_1 P_2$ y $P_1 + P_2 - P_1 P_2$ en término de $R(P_1)$ y $R(P_2)$.

3. Sea H un espacio de Hilbert. $z, y \in H$, $T : H \to H : Tx =< y, x > z$. Pruebe que
   - *a*) T es lineal y continuo con $\|T\| = \|y\|\|z\|$.
   - *b*) Halle $T^\dagger$.
   - *c*) $T^\dagger = T$ sí y sólo si existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $y = \alpha z$.
   - *d*) Halle β tal que $T^2 = \beta T$.
   - *e*) ¿Cuándo T es un proyector?

4. Sea $T : H \to H$, H espacio de Hilbert y T lineal y continuo.
   - *a*) Muestre que son equivalentes las siguientes proposiciones
     - i) T es hermítico, es decir, $T^\dagger = T$.
     - ii) $< Tx, y >=< x, Ty > \qquad \forall x, y \in H$.
     - iii) $< Tx, x >\in \mathbb{R} \qquad \forall x \in H$.
   - *b*) $T^\dagger$ es una isometría ($\|Tx\| = \|x\|, \quad \forall x \in H$) sí y sólo si $T^\dagger T = I$, $T^\dagger$ es una isometría sí y sólo si $TT^\dagger = I$.
   - *c*) T es antihermítico sí y sólo si iT es hermítico, T es unitario sí y sólo si T es una isometría y es normal.
   - *d*) Son equivalentes
     - i) T es normal ($TT^\dagger = T^\dagger T$)
     - ii) $T^\dagger$ es normal
     - iii) $\|Tx\| = \|T^\dagger x\| \qquad \forall x \in H$.
   - *e*) Son equivalentes
     - i) T es un proyector ($T^\dagger T = T$)
     - ii) $T^2 = T = T^\dagger$.

5. Sea T el operador posición de la mecánica cuántica definido por
$$T : D(T) \to L_2(\mathbb{R}) : Tf(t) = tf(t)$$
   donde el dominio de T es $D(T) = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : Tf \in L_2(\mathbb{R})\}$. Verifique que
   - *a*) $D(T) \neq L_2(\mathbb{R})$, es decir, existen funciones de cuadrado integrable en $\mathbb{R}$ que no pertenecen a $D(T)$. Encuentre al menos una tal función.
   - *b*) El operador T no es continuo. Analice para ello la función
$$f_n(t) = \begin{cases} 1 & n \le t < n+1 \\ 0 & t \notin [n, n+1) \end{cases}$$
   - *c*) El operador T ¿es hermítico?

d) Si se toma $L_2([a,b])$ con $a < b$ finitos en lugar de $L_2(\mathbb{R})$, entonces T es continuo tomando $D(T) = L_2([a,b])$ y además resulta $a \leq \|T\| \leq b$.

6. Sea el operador $Tu = -z\frac{du}{dx}$ donde $u \in L_2([a,b]) \cap \{u \in C^1([a,b]) : u(a) = u(b) = 0\}$. Se define el producto interno $< u, v > = \int_a^b u(x)^* v(x) dx$.

   a) Halle $T^\dagger$.

   b) ¿Cúando T es hermítico?

   Nota: el operador momento lineal se define en mecánica cuántica como $p_x = -i\hbar\frac{d}{dx}$ donde $\hbar$ es la denominada constante de Planck.

7. Sea A y B dos operadores hermíticos en un espacio de Hilbert H tal que el conmutador $[A,B] = AB - BA \neq 0$. Sea C el operador definido por $iC = [A,B]$. Definimos la incerteza de A en el vector ϕ como $\Delta A = \|(A- < A >)\phi\|_2$, donde $< A >= (A\phi, \phi)$ es el *valor medio* de A.

   a) Muestre que se cumple el *principio de incerteza de Heisenberg*:

   $$\Delta A.\Delta B \geq \frac{1}{2} | < C > |$$

   b) ¿Cuándo ocurre la igualdad en el principio de incerteza?

   c) Aplique el resultada a $A = x$, $B = -i\hbar\frac{d}{dx}$ y halle

   $$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{1}{2}\hbar.$$

   d) Halle la función ϕ que minimiza la incerteza entre x y p_x.

8. Pruebe que si T es un operador lineal en un espacio de Hilbert H separable y su dominio D_T contiene un sistema ortonormal completo $\{e_1, e_2, \cdots\}$, entonces D_T es siempre denso (denso en H). Ayuda: los vectores $\sum_{i=1}^n c_i e_i$ están en D_T (¿ por qué?) y cualquier $x \in H$ es el límite de alguna sucesión $\{x_n\}$ de la forma anterior (¿ por qué?).

9. Sean A y B dos operadores lineales y continuos en un espacio de Hilbert. Muestre que $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$, $(cA)^\dagger = c^* A^\dagger$ para cualquier escalar c, y que si A y B son hermíticos, entonces AB es hermítico si $AB = BA$.

10. Sea A un operador acotado y lineal. Demuestre que $\|A^\dagger A\| = \|A\|^2$.

11. Si una sucesión de operadores lineales hermíticos es convergente, muestre que su límite es hermítico.

12. En el espacio l_2 se define el operador T mediante $T(x) = (x_1, x_2/2, x_3/3, \cdots)$ para $x = (x_1, x_2, \cdots)$.

    a) Muestre que T es continuo, y encuentre su operador adjunto.

    b) Encuentre el operador inverso de T, su dominio y demuestre que no está acotado.

13. Calcule el operador adjunto del operador $T : l_2 \to l_2$ definido por $T(x) = (0, x_1, x_2, \cdots)$ donde $x = (x_1, x_2, \cdots)$.

14. Pruebe que cualquier operador lineal y continuo T en un espacio de Hilbert puede escribirse de la forma $T = A + iB$ donde A y B son operadores hermíticos.

15. Si A es hermítico, demuestre que el operador e^{iA} es unitario.

16. Sea U un operador unitario en el espacio de Hilbert H y para cada operador T definimos

    $$T_U = U^{-1} T U.$$

    a) Demuestre que si T es acotado, T_U también es acotado y vale $\|T_U\| = \|T\|$.

    b) Demuestre que si T es hermítico, T_U también lo es.