Trabajo práctico n° 6: Espacios de Hilbert. Funcionales lineales

1. Pruebe que son productos internos

$$(a) \quad < f, g > = \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(x) g(x) dx, \quad f, g \in L_2(\mathbb{R}); \qquad (b) \quad < x, y > = \sum_{i=1}^{n} x_i^* y_i, \quad x, y \in \mathbb{C}^n;$$

$$(c) \quad < f, g >= \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x) f^*(x) g(x) dx, \qquad f, g \in L_2(\mathbb{R}), \rho \geq 0 \text{ función peso.}$$

2. Muestre que en un espacio prehilbertiano se cumple:

   a) desigualdad de Cauchy-Schwarz

   $$| < x, y > | \leq \|x\| \|y\|,$$

   b) demuestre que $\|x\| = \sqrt{< x, x >}$ es una norma,

   c) teorema de Pitágoras: si $x \perp y$ entonces

   $$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2,$$

   d) regla del paralelogramo

   $$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

   Nota: *El teorema de Jordan-Von Neumann prueba que una norma puede ser derivada de un producto interno sólo si satisface la regla del paralelogramo y vale además la llamada identidad de polarización:*

   $$< x, y > = \frac{1}{4} \left[\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2 \right].$$

   e) demuestre que el producto interno es continuo, es decir, si $x_n \to x$ e $y_n \to y$, entonces $< x_n, y_n > \to (x, y)$.

3. Indique si los siguientes espacios normados son también prehilbertianos

   a) $\mathbb{R}_p^n$ con $\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p}$,

   b) El espacio de funciones continuas definidas en $[0, \pi]$ con la norma del supremo.

4. Sean H_1 y H_2 dos espacios de Hilbert. Sea H el conjunto de los pares ordenados de $H_1 \times H_2$ con la suma y multiplicación definidas como sigue:

   $$(h_1, h_2) + (g_1, g_2) = (h_1 + g_1, h_2 + g_2)$$

   $$\lambda(h_1, h_2) = (\lambda h_1, \lambda h_2).$$

   Muestre que el producto interno definido mediante

   $$< (h_1, h_2), (g_1, g_2) > = < h_1, g_1 > + < h_2, g_2 >$$

   satisface los axiomas del producto interno y H con este producto interno es un espacio de Hilbert. *H es el llamado el espacio* **suma directa** *de H_1 y H_2 y se escribe $H = H_1 \oplus H_2$.*

5. Halle la mejor aproximación de e^x en $L_2([0,1])$ por polinomios de grado menor o igual a 1. Calcule el error que se comete. Repita lo anterior con polinomios de grado menor o igual a 2.

6. Sea H un espacio de Hilbert, v un vector arbitrario de H.

   a) Demuestre que si $\{e_1, e_2, \cdots\}$ es una sucesión infinita de vectores ortonormales en H, necesariamente $\lim_{n\to\infty} < e_n, v > = 0$.

   b) Demuestre entonces que $\lim_{n\to\infty} < x_n, y > = < x, y >$, $\forall y \in H$, (*se dice que x_n converge débilmente a x*) no implica $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Pero si además $\|x_n\| \to \|x\|$ o bien $\{x_n\}$ tiene límite, entonces se puede concluir que $x_n \to x$.

7. Pruebe la siguiente generalización de la fórmula de Parseval. Si H es un espacio de Hilbert separable y $\{e_1, e_2, \cdots\}$ es una base ortonormal, entonces para todo $x, y \in H$ vale

$$< x, y > = \sum_{k=1}^{\infty} < x, e_k >< e_k, y > .$$

   Se dice que uno *expande el producto interno insertando un sistema ortonormal completo*. Además si la relación vale para todo par x, y entonces el conjunto $\{e_k\}$ es un sistema ortonormal completo.

8. Considere el espacio $L_2([0, 2\pi])$. Puede demostrarse que para cualquier $g \in L_2([0, 2\pi])$ las ecuaciones

$$\int_0^{2\pi} g(x)e^{inx}dx = 0, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots,$$

   implican $g = 0$ c.t.p. Use este resultado para probar que el conjunto ortonormal $e_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx}$ es completo. Defina

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx,$$

   para cualquier función $f \in L_2([0, 2\pi])$. Justifique rigurosamente la fórmula de expansión en series de Fourier

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}.$$

   Justifique también la ecuación (fórmula de Parseval clásica)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx.$$

   ¿La fórmula de Fourier implica convergencia puntual de la serie a la función f?

9. La fórmula de Parseval es muy útil para sumar series. Por ejemplo, sea $f(x) = x - 1/2$ en el intervalo $[0, 1]$. Calcule los coeficientes de Fourier de f respecto de la base ortonormal de funciones periódicas complejas. Use la fórmula de Parseval para evaluar la serie $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$.

10. Demuestre que:

    a) $U^{\perp}$ es un subespacio vectorial cerrado para cualquier subconjunto U de un espacio de Hilbert.

    b) Si U es un subespacio cerrado de H entonces muestre que $H = U \oplus U^{\perp}$.

11. *a*) Sean N y M dos subespacios vectoriales cerrados de un espacio de Hilbert H. Si $M \subset N$, muestre que $N^{\perp} \subset M^{\perp}$ y además $(M^{\perp})^{\perp} = M$.

    b) Sean N y M dos subespacios vectoriales de un espacio de Hilbert H. Si $M \subset N$, muestre que $N^{\perp} \subset M^{\perp}$, $M \subset (M^{\perp})^{\perp} = M$, pero $(M^{\perp})^{\perp}$ no necesariamente es igual a M.

12. ¿Cuál es el complemento ortogonal del conjunto de las funciones pares en $L_2([-1, 1])$?

13. Sea $\mathbb{R}^n$ el espacio euclídeo de n dimensiones y sea $a \in \mathbb{R}^n$ un vector fijo. Entonces

    a) El producto escalar $< x, y >$ define un funcional lineal $f(x) = (x, a)$ sobre $\mathbb{R}^n$. Muestre que es un funcional continuo.

    b) Halle la norma de f.

14. En un espacio de Hilbert con base ortonormal $\{e_n\}$ sea F_n la funcional definida por $F_n(\sum_k x_k e_k) = x_n$. ¿Es continua? ¿Cuál es su núcleo? ¿Cuál es su norma?

15. Sea F una funcional lineal continua en un espacio de Hilbert. Pruebe que existe un punto x_0, de norma 1, tal que $F(x_0) = \text{máx}_{\|x\|=1} |F(x)|$. ¿ Es único tal punto?

16. Sea $V = C([-1, 1])$ el espacio de las funciones continuas con el producto interno usual $< f, g > = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$. Definimos el funcional F mediante $F(u) = \int_0^1 u(x)dx$. Demuestre que F es lineal y continuo. ¿Existe una función $v \in V$ tal que $F(u) =< u, v >$ para toda $u \in V$? ¿ Su respuesta está de acuerdo o contradice al teorema de la representación de Riesz?