Trabajo práctico n° 5: Espacios normados - Operadores lineales

1. Sea $E = \mathbb{R}^n$ y $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in E$.
   a) Pruebe que son normas las siguientes funciones:
      i) $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}, p = 1, 2.$
      ii) $\|x\|_\infty = \max_{1\le i\le n} |x_i|$.
   b) Muestre que
      i) $\|x\|_2 \le \sqrt{n}\|x\|_\infty$
      ii) $\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \|x\|_1 \le n\|x\|_2$
   c) Interprete geométricamente para $\|x\|_1$, $\|x\|_2$ y $\|x\|_\infty$ el entorno abierto de radio r y centro en el origen para el caso $n = 2$.
2. Sea $(E, \|.\|)$ un espacio normado. Pruebe que:
   a) $|\|x\| - \|y\|| \le \|x - y\|$
   b) Si $x_n \to x$ en E, entonces
      i) $\lambda x_n \to \lambda x$ en E, $\quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$
      ii) $\|x_n\| \to \|x\|$ en $\mathbb{R}$
      iii) $\{\|x_n\|\}$ es un conjunto acotado en $\mathbb{R}$.
3. Demuestre que el espacio $C([0, 1])$ de funciones continuas con la norma $\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 |f(x)|^2 dx}$ no es completo. Considere para ello la sucesión de funciones

$$f_n(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t \le \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \\ \frac{nt}{2} - \frac{n}{4} + \frac{1}{2}, & \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \le t \le \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \\ 1 & \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \le t \le 1 \end{cases}$$

4. Definimos $C^1[a, b]$ el espacio de las funciones con derivadas primeras continuas en $[a, b]$ con la norma

$$\|f\|_1 = \sqrt{\int_a^b (|f|^2 + |f'|^2) dx}.$$

   Muestre que esta es una norma. ¿ Es un espacio normado completo?
5. Sea $T : E_1 \to E_2$, $(E_1, \|.\|_1)$ y $(E_2, \|.\|_2)$ espacios normados y T lineal. Entonces:
   a) T es continuo en $x = 0$ sí y sólo si T es continuo en x_0 para todo $x_0 \in E_1$,
   b) T es continuo sí y sólo si existe $M > 0$ tal que $\|Tx\|_2 \le M\|x\|_1$ para todo $x \in E_1$.
6. Sea $L(E_1, E_2) = \{T : E_1 \to E_2 : T \text{ es lineal y continuo }\}$.
   a) Demuestre que $L(E_1, E_2)$ es un espacio vectorial.
   b) Sea $\|.\| : L \to \mathbb{R}$ tal que

$$\|T\| = \inf\{M > 0 : \|Tx\|_2 \le M\|x\|_1 \ \ \forall x \in E_1\}.$$

   Muestre entonces que $L(E_1, E_2)$ es un espacio vectorial normado con $\|T\|$ la norma del operador T.

c) Muestre que la norma puede definirse de manera equivalente

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_1=1} \|Tx\|_2 = \sup_{\|x\|_1=1} \|Tx\|_2 = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Tx\|_2}{\|x\|_1}.$$

7. *a*) Considere el espacio normado $\mathbb{R}^n$ con norma $\|x\| = \text{máx}_i |x_i|$. Sea A el operador que corresponde a multiplicar los elementos de $\mathbb{R}^n$ por la matriz cuadrada de elementos a_{ij}. Demuestre que

$$\|A\| = \text{máx}_k \sum_j |a_{kj}|.$$

b) Considere ahora la norma $\|x\| = \sum_i |x_i|$. ¿Cuál es la norma del operador A?

8. ¿Cuál es la norma del operador $T : C[a,b] \to \mathbb{R}$ definido por $T(f) = \int_0^1 \phi(x)f(x)dx$, donde ϕ es una dada función continua en $[0,1]$?

9. Pruebe que el operador $D : C^1[0,1] \to C[0,1]$ definido mediante $Df = f'$ no es continuo.

10. Considere el espacio vectorial P_n de los polinomios de grado $\leq n$, donde n es un dado entero. Si $p(t) = \sum_{i=1}^n a_i t^i$ muestre que $\|p\| = \text{máx}_i |a_i|$ define una norma en P_n. ¿Es P_n un espacio de Banach? Muestre además que el operador diferenciación D es un operador acotado en P_n y encuentre su norma.

11. El operador $T : L_1(\mathbb{R}) \to L_\infty(\mathbb{R}) : T(f) = \hat{f}$ con $\hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi ikx} f(x)dx$ (esta es la transformada de Fourier de f) verifique T es lineal y continua con $\|T\| \leq 1$.

12. Sean E y F espacios normados y $T : E \to F$ un operador lineal. Si existe una constante positiva a tal que

$$\|T(x)\| \geq a\|x\|$$

para todo $x \in E$, demuestre que T es inversible, que T^{-1} es un operador acotado y encuentre una cota superior para la norma de T^{-1}.

13. Sea $\delta : C[0,1] \to \mathbb{R}$ la funcional lineal que evalua una función en el origen: $\delta(f) = f(0)$. Si $C[0,1]$ está equipado con la norma del supremo,

$$\|f\|_\infty = \sup_{0\leq x\leq 1} |f(x)|,$$

demuestre que δ es acotado y calcule su norma. Si $C[0,1]$ está equipado con la norma

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|dx,$$

demuestre que δ no está acotada.

14. Supongamos que $k : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ es una función continua. Pruebe que el operador integral $K : C([0,1]) \to C([0,1])$ definido mediante

$$Kf(x) = \int_0^1 k(x,y)f(y)dy$$

es acotado y que

$$\|K\| = \text{máx}_{0\leq x\leq 1} \left\{ \int_0^1 |k(x,y)|dy \right\}.$$