MATEMÁTICA APLICADA 2 Segundo cuatrimestre 2014

Licenciatura en Física, Universidad Nacional de Rosario

Trabajo práctico n° 4: Espacios métricos

1. Pruebe que los siguientes pares (E, d) forman un espacio métrico:

   a) E conjunto arbitrario, $d(x,y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$ $\forall x, y \in E$.

   b) $E = \{x = (x_1, x_2, \cdots, x_n), x_n \in \mathbb{R}\}$,
   $$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_k - x_k)^2}$$
   (espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$). También con $d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$ (E, d_1) es un espacio métrico. Lo mismo ocurre con
   $$d_\infty(x,y) = \max_{1 \leq i \leq n} \mid x_i - y_i \mid .$$
   Interprete geométricamente d_1, d_2 y d_∞ para $\mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.

   c) $E \equiv C([a,b]) = \{f : f : [a,b] \to \mathbb{R},\ f \text{ es continua}\}$,
   $$d(f,g) = \max_{a \leq t \leq b} \mid g(t) - f(t) \mid .$$

   d) $E = \{\{x_i\}_{i=1}^{\infty} : \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty\}$,
   $$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (y_i - x_i)^2}.$$
   $(E, d) \equiv l_2$.

   e) $E = C([a,b])$, $d(x,y) = \sqrt{\int_a^b [x(t) - y(t)]^2 dt}$.

   f) $E = \{\{x_n\}_{n=1}^{\infty} : \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ es acotada }\}$, $d(x,y) = \sup_k \mid y_k - x_k \mid$, $(E, d) \equiv m$.

2. Sea (E, d) un espacio métrico. Pruebe que también son distancias las siguientes funciones:

   a)
   $$d_1(x,y) = \frac{d(x,y)}{1 + d(x,y)},$$

   b) $d_2(x,y) = \min(1, d(x,y))$,

   c) $d_\alpha(x,y) = \alpha d(x,y)$.

3. Consecuencias de la desigualdad triangular

   a) Si X es un espacio métrico entonces $|d(x,z) - d(y,z)| \leq d(x,y)$ para todos $x, y, z \in X$.

   b) Si x e y son dos puntos distintos de un espacio métrico X, entonces existe un número $t > 0$ para el cual vale $B_t(x) \cap B_t(y) = \emptyset$.

   c) Si x pertenece a un espacio métrico X y si $r > 0$, para cada $y \in B_r(x)$ existe $t > 0$ para el cual vale $B_t(y) \subset B_r(x)$.

   d) Si x e y son puntos de un espacio métrico X y si $r, s > 0$, entonces para cada $z \in B_r(x) \cap B_s(y)$ existe un número $t > 0$ para el cual vale $B_t(z) \subset B_r(x) \cap B_s(y)$.

e) Una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de puntos en un espacio métrico puede converge a lo sumo a un único límite.

f) Si una sucesión $\{x_n\}$ converge a x, entonces es una sucesión de Cauchy.

4. Considere $C([0,2\pi])$. Sea $f(t)=\cos t$ y $g(t)=\operatorname{sen} t$. Determine el más pequeño $r>0$ de manera que $f\in B(g,r)$.

5. Muestre las siguientes propiedades de la clausura de un conjunto A:

   a) $A\in[A]$
   b) $[[A]]=[A]$
   c) si $A_1\subset A_2$ entonces $[A_1]\subset[A_2]$
   d) $[A_1\cup A_2]=[A_1]\cup[A_2]$.

6. *a*) Dos métricas d_1 y d_2 sobre un mismo conjunto X se dice que son equivalentes si la convergencia a un límite en cualquiera de las métricas implica la convergencia al mismo límite en la otra métrica. Demuestre que si existen constantes positivas α y β tales que para todo $x,y\in X$

$$\alpha d_1(x,y)\le d_2(x,y)\le \beta d_1(x,y),$$

   entonces d_1 y d_2 son equivalentes.

   b) Sea X el conjunto de las funciones u reales continuamente derivables en $[0,1]$ que satisfacen $u(0)=0$. Para $f,g\in X$ definimos

$$d_1(f,g)=\sqrt{\int_0^1(f-g)^2dx},\qquad d_2(f,g)=\sqrt{\int_0^1(f'-g')^2dx},$$

$$d_3(f,g)=\sqrt{d_1^2(f,g)+d_2^2(f,g)},$$

   demuestre que d_1,d_2,d_3 son métricas en X. Demuestre que d_2 y d_3 son equivalentes. d_1 y d_2 no son equivalentes, lo que se deduce examinando elementos de la forma $\operatorname{sen}(\alpha x)$.

7. Muestre que la distancia es continua en $\mathbb{R}$. Esto es, muestre que si (E,d) es un espacio métrico y se tiene $x_n\to x$ y $y_n\to y$ en (E,d) entonces $d(x_n,y_n)\to d(x,y)$.

8. Sean A, B y C subconjuntos de un espacio métrico X, tal que $A\subset B\subset C$. Demuestre que si A es denso en B y B es denso en C, entonces A es denso en C.

9. Sea (E,d) un espacio métrico y $A\subset E$. Muestre que las siguientes proposiciones son equivalentes:

   a) $[A]=E$ (A es denso en E).
   b) El único conjunto cerrado que contiene a A es E.
   c) $\forall x\in E$ se tiene que $A\cap V\neq\emptyset$, $\forall V\subset B(x)$.
   d) $A\cap V'\neq\emptyset$ $\forall V'$ abierto no vacío contenido en E.
   e) $\forall x\in E$ se tiene que $A\cap B_r(x)\neq\emptyset$ $\forall r>0$.
   f) $\forall x\in E$, $\exists\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset A: x_n\to x$ en E.

10. Sea $b\in\mathbb{R}, b>1$, $n\in\mathbb{N}$ de manera que $n^2<b<(n+1)^2$. Sea la siguiente sucesión

$$\begin{cases} x_0=n\\ \vdots\\ x_{m+1}=n+\frac{b-n^2}{n+x_m}, \quad m=0,1,\cdots\end{cases}$$

   Demuestre que $x_n\to\sqrt{b}$.

   Ayuda: construya una adecuada función $f:[1,+\infty)\to[1,+\infty)$ y aplique el teorema del punto fijo de Banach.

11. Muestre que $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida mediante

$$T(x) = \frac{\pi}{2} + x - arctan(x)$$

no tiene puntos fijos, y

$$|T(x) - T(y)| < |x - y|$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}$. ¿Por qué este ejemplo no contradice el teorema de la contracción?

12. La siguiente ecuación integral para $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ aparece en un modelo del movimiento de partículas de gas en una línea:

$$f(x) = 1 + \frac{1}{\pi} \int_{-a}^{a} \frac{1}{1 + (x - y)^2} f(y) dy \quad \text{para} \quad -a \leq x \leq a.$$

Pruebe que esta ecuación tiene una única solución continua para cada $0 < a < \infty$. Pruebe que esa solución es no-negativa. ¿Qué puede decirse cuando $a = \infty$?