MATEMÁTICA APLICADA 2 Segundo cuatrimestre 2014

Licenciatura en Física, Universidad Nacional de Rosario

Trabajo práctico n° 2: Transformada de Fourier

Transformada de Fourier

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i\xi x} f(x)dx$$

1. Halle $\widehat{f}(x)$ siendo $f(x) = \chi_{[-a,a]}$.
2. Sea $\tau_h : L_1(\mathbb{R}) \to L_1(\mathbb{R})$ el operador traslación dado por
$$\tau_h(f) = g : g(x) = f(x-h).$$
τ_h es lineal y continuo con $\|\tau_h\| = 1$. Además, $\widehat{\tau_h f}(\xi) = e^{-2\pi i\xi h}\widehat{f}(\xi)$.
3. $\widehat{f}'(\xi) = 2\pi i\xi\widehat{f}(\xi)$, $f \in C^n(\mathbb{R})$, $\widehat{f^{(n)}}(\xi) = (2\pi i\xi)^n\widehat{f}(\xi)$, $f^{(k)} \in L_1(\mathbb{R})$, $\quad k = 0, 1, 2, \cdots$.
4. Sea $F(x) = x^n f(x)$ con $F \in L_1(\mathbb{R})$. Entonces
$$\frac{d^n}{d\xi^n}\widehat{f}(\xi) = \widehat{T}(\xi)$$
con $T(x) = (-i2\pi x)^n f(x)$.
5. Halle la transformada de $E(x) = e^{-\pi x^2}$. Obtenga así la transformada de $G_\lambda(x) = e^{-\pi\lambda^2x^2}$. Estudie el límite cuando $\lambda \to 0$ de la sucesión de funciones G_λ.
Use: $\widehat{f(\lambda x)}(\xi) = \frac{1}{|\lambda|}\widehat{f}(\frac{\xi}{\lambda})$.
6.
   a) Muestre que si f es par entonces $\widehat{f}$ es par, si f es impar entonces $\widehat{f}$ es impar.
   b) Muestre que si f y $\widehat{f}$ son reales entonces f es par, si f es real y $\widehat{f}$ es imaginaria pura entonces f es impar.
7. Halle la transformada de Fourier de
   a) $f(x) = \chi_{[0,+\infty]}e^{-\alpha x}$, con $\alpha > 0$.
   b) $f(x) = e^{-\alpha|x|}$, con $\alpha > 0$.
   c) $f(\vec{r}) = \frac{e^{-\alpha|\vec{r}|}}{|\vec{r}|}$, $g(\vec{r}) = e^{-\alpha|\vec{r}|}$, con $\vec{r} = (x, y, z)$ y $\alpha > 0$.
8. Definición: La convolución de f y g se define $(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dyf(y)g(x-y)$. Demuestre las siguientes propiedades:
   a) $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1\|g\|_1$
   b) $f * g = g * f$
   c) $f * (g * h) = (f * g) * h$
   d) $\widehat{f * g} = \widehat{f}\widehat{g}$
   e) No exite $G \in L_1(\mathbb{R})$ tal que $G * f = f$ para toda función $f \in L_1(\mathbb{R})$.
9. Sea $g \in L_1(\mathbb{R})$, no negativa, nula fuera del intervalo $[-1, 1]$ y tal que $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx = 1$, y sea $g_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon}g(\frac{x}{\epsilon})$.
   a) Verifique que si $f \in L_1(\mathbb{R})$ es constante igual a c en el intervalo $[a, b]$, entonces $f * g_\epsilon$ es también constante igual a c en el intervalo $[a + \epsilon, b - \epsilon]$ (para $\epsilon < \frac{b-a}{2}$).

b) Calcule y grafique (aproximadamente) $f * g_\epsilon$ para $f = c\chi_{(-\infty,a)} + d\chi_{[a,+\infty]}$ suponiendo si se quiere que g es continua, en forma de campana.

10. Demuestre que la sucesión de distribuciones temperadas $T_n = e^{n^2}\delta_n$ converge a cero en D^* pero no en S^*.

11. Resuelva en S^* la ecuación

$$f'' - a^2 f = \delta, \qquad a > 0.$$

12. Usando $x.\mathrm{vp}\frac{1}{\mathrm{x}} = 1$ muestre que

$$\widehat{\mathrm{vp}\frac{1}{x}} = -2i\pi(H - \frac{1}{2}).$$

13. Calcule la transformada de Fourier de la distribución

$$f_\epsilon(t) = \frac{1}{t + i\epsilon},$$

en donde ϵ es un parámetro real positivo y estudie el límite $\epsilon \to 0^+$. Usando el ejercicio anterior deduzca que

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{1}{t \pm i\epsilon} = \mathrm{vp}\frac{1}{t} \mp i\pi\delta,$$

el límite tomado en el sentido de las distribuciones.

14. Relación de incertidumbre
Sea $f \in L_2(\mathbb{R})$ que cumple $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = 1$, $\int_{\mathbb{R}} x|f(x)|^2 dx = 0$ y $\int_{\mathbb{R}} x^2|f(x)|^2 dx < \infty$. Consideremos $|f(x)|^2$ como una densidad de probabilidad. Sea $\widehat{f}$ la transformada de Fourier de f. Definimos

$$(\Delta x)^2 = \int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 dx,$$

la desviación estandar en la variable x y

$$(\Delta k)^2 = \int_{\mathbb{R}} k^2 |\widehat{f}(k)|^2 dk,$$

la desviación estandar en k.

a) Muestre que

$$\Delta x \Delta k \geq \frac{1}{4\pi}.$$

Sugerencia: puede ser útil la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

b) Muestre que la igualdad se cumple únicamente para la función gaussiana

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi(\Delta x)^2)^{1/4}} e^{-x^2/(2\Delta x)^2}.$$