MATEMÁTICA APLICADA 2 Segundo cuatrimestre 2014

Licenciatura en Física, Universidad Nacional de Rosario

Trabajo práctico n° 1: Distribuciones

1. Muestre que la delta de Dirac δ no puede representarse como una función $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Considere para ello las funciones $\phi_\epsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ (justifique la pertenencia) definidas mediante:

$$\phi_\epsilon(x) = \begin{cases} e^{-\frac{\epsilon^2}{\epsilon^2 - x^2}} & |x| \leq \epsilon, \epsilon > 0 \\ 0 & |x| > \epsilon \end{cases}$$

   Muestre además que

   a) Si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ entonces $\lim_{\epsilon\to 0} | < T_f, \phi_\epsilon > | = 0$

   b) Se fuera $\delta = T_f$ con $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ entonces se contradice el item anterior.

2. Halle la derivada en el sentido de las distribuciones de las funciones localmente sumanbles siguientes:

   a) la función de Heaviside $H(x) = \chi_{[0,+\infty]}$.

   b) $f(x) = \log |x|$

   c) $f(x) = \chi_{(0,+\infty)} \frac{1}{\sqrt{x}}$. Halle además δ^m.

3. Calcule las derivadas sucesivas de T_f para $f(x) = |x|$, y derivadas primera y segunda de T_g si $g(x) = | \cos x|$.

4. Muestre que las deltas de Heisenberg definidas como

$$\delta^+ = \frac{\delta}{2} - \frac{1}{2\pi i} v.p.\frac{1}{x},$$

$$\delta^- = \frac{\delta}{2} + \frac{1}{2\pi i} v.p.\frac{1}{x}$$

   pueden definirse mediante los siguientes límites:

$$< \delta^+, \phi >= -\frac{1}{2\pi i} \lim_{y\to 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\phi(x)}{x + iy} dx,$$

$$< \delta^-, \phi >= \frac{1}{2\pi i} \lim_{y\to 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\phi(x)}{x - iy} dx.$$

   Concluya que

$$< \delta, \phi >= \lim_{y\to 0^+} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \phi(x) \frac{y}{x^2 + y^2},$$

   o sea, la delta de Dirac puede obtenerse como

$$\delta = \lim_{y\to 0^+} \frac{1}{\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} \qquad \text{núcleo de Poisson.}$$

5. Obtenga la representación de la delta de Dirac del ejercicio anterior mediante el teorema de condición suficiente para núcleos singulares o derivando la relación

$$H(x) = \lim_{y\to 0^+} \left(1 + \frac{2}{\pi} \arctan \frac{x}{y}\right).$$

6. Pruebe que la delta de Dirac es el límite de los siguientes núcleos:

   a) Piccard $K_n(x) = \frac{1}{2}ne^{-n|x|}$,

   b) Stieltjes $K_n(x) = \frac{1}{\pi}\frac{n}{e^{nx}+e^{-nx}}$,

   c) Fejer $K_n(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1-\cos nx}{nx^2}$.

7. Muestre que la delta de Dirac unidimensional posee las siguientes propiedades:

   a) $x\delta = 0, \qquad x.\delta' = -\delta, \qquad x^2.\delta' = 0$ (existen divisores del cero).

   b) $x.\delta^m = -m\delta^{m-1}, \qquad x^m.\delta^m = (-1)^m m!\delta$.

   c) $x.\mathrm{vp}\frac{1}{\mathrm{x}} = 1$

   d) $\delta.(x.\mathrm{vp}\frac{1}{\mathrm{x}}) = \delta, \qquad (\mathrm{x}.\delta).\mathrm{vp}\frac{1}{\mathrm{x}} = 0$ (no se conserva la propiedad asociativa).

8. Sean $\phi \in \mathcal{D}$ y $T \in \mathcal{D}^*$. Verifique que:

   a) Si $\phi T = 0$ entonces $< T, \phi >= 0$.

   b) La recíproca es falsa.
   Ayuda: una posibilidad es $T = T_{\chi_{[-1,1]}}$, y ϕ convenientemente elegida.

9. Siendo $\psi \in \mathcal{E}$ y $T \in \mathcal{D}^*$ verifique que $(\psi T)' = \psi' T + \psi T'$.