MATEMÁTICA APLICADA II — Segundo cuatrimestre 2011

Licenciatura en Física, Universidad Nacional de Rosario

Espacios de Banach[1]

1. Introducción

Frecuentemente estamos interesados en ”qué tan grande.es una función. Esto conduce naturalmente a la noción de espacios funcionales normados. Hay muchas maneras de definir el tamaño de una función. Supongamos que $R(t)$ es la cantidad de lluvia que cae medida en centímetros por hora. Si uno es un chacarero estará probablemente preocupado por el total de lluvia que cae. Una gran lluvia tiene una gran $\int_{\text{días}} |R(t)|dt$. Si uno es un ingeniero estará preocupado por la capacidad del sistema de desague pluvial de una ciudad para drenar el agua de lluvia, uno estará interesado en el máximo valor de $R(t)$, y por lo tanto, una gran lluvia será una con un gran $\sup |R(t)|$.

Vimos anteriormente que un espacio métrico no tiene ninguna clase de estructura algebraica asociada. En muchas aplicaciones, sin embargo, el espacio métrico tiene una métrica derivada de una norma que da el ”tamaño”de un vector. Tales espacios se llaman espaciones lineales normados. Es muy importante y natural trabajar en espacios completos: tratar de hacer análisis funcional en espacios no completos es como tratar de hacer análisis elemental sobre los racionales. Cuando el espacio normado es completo se lo llama espacio de Banach. La teoría de estos espacios fue completada por el matemático polaco Stefan Banach en 1932.

2. Espacios lineales normados

Una norma en un espacio lineal (o vectorial) X es una función $\|.\| : X \to \mathbb{R}$ con las siguientes propiedades:

(a) $\|x\| \geq 0$, para todo $x \in X$ (no negatividad);
(b) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$, para todo $x \in X$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ (ó $\mathbb{C}$) (homogeneidad);
(c) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para todos $x, y \in X$ (desigualdad triangular);
(d) $\|x\| = 0$ implica $x = 0$ (positividad estricta).

Un espacio *lineal normado* $(X, \|.\|)$ es un espacio lineal X equipado con una norma $\|.\|$.

Un espacio normado es un espacio métrico respecto a la métrica d derivada de su norma, donde $d(x, y) = \|x - y\|$.

3. Espacios de Banach

Definición: Un espacio de *Banach* es un espacio vectorial normado que es un espacio métrico completo respecto a la métrica derivada de su norma.

`Ejemplos de espacios de Banach`

1. Para $1 \leq p < \infty$, definimos la norma p en $\mathbb{R}^n$ mediante

$$\|x\|_p = \left(|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots + |x_n|^p\right)^{1/p},$$

[1]Notas preparadas por Luis O. Manuel

donde $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Para $p = \infty$ definimos la norma del máximo mediante

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|.$$

$\mathbb{R}^n$ equipado con la norma p es un espacio de Banach de dimensión finita para $1 \le p \le \infty$.

2. El espacio $C([a,b])$ de funciones continuas reales (o complejas) definidas en $[a,b]$ con la norma del supremo es un espacio de Banach. Más generalmente, el espacio $C(K)$ de funciones continuas en un espacio métrico compacto K equipado con la norma del supremo es un espacio de Banach.

3. Para $1 \le p < \infty$, el espacio de sucesiones $l_p = \{x = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\}$ con la norma p
$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p}.$$
Para $p = \infty$, el espacio de sucesiones acotadas, l_∞, con
$$\|x\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$$
. l_p es un espacio de Banach de infinitas dimensiones para $1 \le p \le \infty$.

4. $L_p([a,b])$, el espacio de funciones integrables de potencia p de Lebesgue en el intervalo $[a,b]$ con la norma
$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$
Para $p = \infty$ el espacio $L_\infty([a,b])$ consiste de todas las funciones medibles según Lebesgue $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que son *esencialmente acotadas* en $[a,b]$, es decir, que f es acotada en $[a,b]$ excepto posiblemente en un subconjunto de medida nula. La norma en $L_\infty([a,b])$ es la norma del *supremo esencial*
$$\|f\|_\infty = \inf\{M : |f(x)| \le M \text{ c.t.p. en } [a,b]\}.$$
Los espacios $L_p([a,b])$ son de Banach para $1 \le p \le \infty$.

Un subespacio vectorial cerrado de un espacio de Banach es un espacio de Banach, ya que un subconjunto cerrado de un espacio completo es completo. En infinitas dimensiones los subespacios vectoriales no tienen porqué ser cerrados. Por ejemplo, espacios de Banach de infinitas dimensiones tienen subsespacios propios densos, algo bastante difícil de visualizar con nuestra intuición de espacios finito-dimensionales.

Ejemplo: El espacio de los polinomios, $\mathcal{P}([0,1])$, es un subespacio vectorial de $C([0,1])$, ya que una combinación lineal de polinomios es un polinomio. Sin embargo, no es un espacio cerrado. Tomemos la sucesión $\{p_N\}$ definida mediante

$$p_N(x) = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} x^k.$$

Esta es una sucesión de Cauchy porque (si $M > N$)

$$d(p_N, p_M) = \|p_N - p_M\| = \sum_{k=N+1}^{M} \frac{1}{k!} < \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

diferencia que es tan pequeña como uno quiera si N es lo suficientemente grande. Por otro lado, la sucesión no puede converger a ningún polinomio con $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ con un determinado n ya que

$$d(p_N, p) = \|p_N - p\| = |a_0 - 1| + |a_1 - 1| + |a_2 - 1/2| + \cdots$$
$$+ \left|a_n - \frac{1}{n!}\right| + \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k!} \geq \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k!}.$$

Esto nos dice que

$$\lim_{N\to\infty} d(p_N, p) \geq e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

para cualquier n fijo. Como n es siempre finito, el miembro derecho de la ecuación anterior es siempre mayor a cero, por lo cual, p_N no puede converger a ningún polinomio.

Si bien el espacio de polinomios no es completo, por el teorema de la aproximación de Weierstrass sabemos que es denso en $C([a, b])$.

4. Los espacios L_p son espacios de Banach

Teorema de Riesz-Fisher:*Los espacios funcionales $L_p(X)$ son espacios de Banach.*

Este teorema suele llamarse el teorema generalizado de Riesz-Fisher, porque fueron estos autores los que primero probaron la completitud del espacio $L_2([0, 2\pi])$, el cual juega un papel central en el análisis de Fourier.

Demostración: Sea $\{f_n\}$ una sucesión de Cauchy en $L_p(X)$, nuestro objetivo es demostrar que la sucesión es convergente. Recordando que una sucesión de Cauchy que tiene una subsucesión convergente es siempre convergente, nuestra estrategia será extraer de $\{f_n\}$ una subsucesión convergente. Para tal fin, primero elegimos un índice N_1 tal que

$$\|f_n - f_m\| < \frac{1}{2} \quad \text{si} \quad n, m > N_1, .$$

Luego elegimos $N_2 > N_1$ tal que

$$\|f_n - f_m\| < (\frac{1}{2})^2 \quad \text{si} \quad n, m > N_2,$$

y seguimos procediendo de esta manera. Consideremos ahora la subsucesión $\{\hat{f}_k\}$ de $\{f_n\}$ construida como sigue

$$\hat{f}_1 = f_{N_1+1}, \hat{f}_2 = f_{N_2+1}, \cdots, \hat{f}_k = f_{N_k+1} \cdots .$$

Luego tenemos

$$\|\hat{f}_1 - \hat{f}_2\| < \frac{1}{2}, \ \ \|\hat{f}_2 - \hat{f}_3\| < \frac{1}{2^2}, \cdots \|\hat{f}_k - \hat{f}_{k+1}\| < \frac{1}{2^k}, \cdots$$

Por conveniencia introducimos la notación

$$g_k = |\hat{f}_k - \hat{f}_{k+1}|;$$

entonces
$$\|g_k\| = \left(\int_X |\hat{f}_k - \hat{f}_{k+1}|^p dx\right)^{1/p} = \|\hat{f}_k - \hat{f}_{k+1}\| < \frac{1}{2^k}.$$
Gracias a la desigualdad triangular vale
$$\|g_1 + g_2 + \cdots + g_n\| \leq \|g_1\| + \cdots + \|g_n\| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} < 1.$$
Esto implica que la función G definida mediante
$$G(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} g_k(x) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)$$
pertenece a L_p. Para ver esto, sea
$$\phi_n(x) = \sum_{k=1}^{n} g_k(x),$$
resulta $|\phi_n|^p \leq |\phi_{n+1}|^p$, además, tenemos el límite puntual
$$\lim_{n\to\infty} |\phi_n(x)|^p = \left|\sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)\right|^p,$$
por lo cual las condiciones del teorema de la convergencia monótona son satisfechas; además
$$\int_X |G|^p dx = \int_X \left|\sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)\right|^p dx = \lim_{n\to\infty} \int_X \left|\sum_{k=1}^{n} g_k\right|^p dx$$
$$= \lim_{n\to\infty} (\|g_1 + \cdots + g_n\|)^p.$$
Aquí, debido a la ecuación (**??**), el miembro de la derecha es finito, por lo tanto, como fue dicho, $|G|$ es de potencia p integrable. Abandonamos ahora nuestra notación g_k, y reescribimos
$$G \equiv \sum_{k=1}^{\infty} |\hat{f}_k - \hat{f}_{k+1}| \in L_p(X). \tag{1}$$
Ahora, notando que
$$|F(x)| \equiv \left|\sum_{k=1}^{\infty} (\hat{f}_k - \hat{f}_{k+1})\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\hat{f}_k - \hat{f}_{k+1}| \tag{2}$$
resulta fácilmente demostrable que el miembro de la izquierda es de potencia p integrable y entonces
$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (\hat{f}_k(x) - \hat{f}_{k+1}(x))$$
es de potencia p integrable. Esto implica que $F(x)$ debe ser finita c.t.p. Pero entonces, c.t.p. tenemos
$$F(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (\hat{f}_k(x) - \hat{f}_{k+1}(x)) = \lim_{n\to\infty} (\hat{f}_1(x) - \hat{f}_{n+1}(x))$$
por lo tanto c.t.p. vale
$$\lim_{n\to\infty} \hat{f}_n(x) = \hat{f}_1(x) - F(x).$$

Introduciendo la notación

$$f(x) = \hat{f}_1(x) - F(x), \tag{3}$$

vemos que

$$\lim_{n\to\infty} \hat{f}_n(x) = f(x)$$

donde $f(x)$, el límite puntual de $\{\hat{f}_k\}$ c.t.p., es de potencia p integrable. Esto sigue a partir de (3),

$$|f|^p = |\hat{f}_1 - F|^p \leq 2^p \left(|f_1|^p + |F|^p\right)$$

y ambos $|f_1|^p$, $F|^p$ son integrables.

Resumiendo hasta ahora: *la subsucesión $\{\hat{f}_n\}$ de una dada sucesión de Cauchy $\{f_n\}$ converge puntualmente c.t.p. a una función $f \in L_p$*. Este, en sí mismo, es un resultado interesante, pero por supuesto todavía no podemos decir que $\{\hat{f}_n\}$ es convergente según la norma, como debe suceder si L_p es completo. Sin embargo, este comportamiento esperado, aunque no es obvio, es verdadero. Para ver esto, notemos que (usando la ecuación (1))

$$|\hat{f}_1 - \hat{f}_n| = \left|\sum_{k=1}^{n-1} (\hat{f}_k - \hat{f}_{k+1})\right| \leq \sum_{k=1}^{n-1} |\hat{f}_k - \hat{f}_{k+1}|$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} |\hat{f}_k - \hat{f}_{k+1}| = G.$$

También, de las ecuaciones (3), (2) y (1),

$$|f - \hat{f}_1| = |F| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\hat{f}_k - \hat{f}_{k+1}| = G.$$

Juntando las dos últimas desigualdades,

$$|f - \hat{f}_n| = |(f - \hat{f}_1) + (\hat{f}_1 - \hat{f}_n)| \leq |f - \hat{f}_1| + |\hat{f}_1 - \hat{f}_n| \leq 2G \leq 2|G|$$

o

$$|f - \hat{f}_n|^p \leq 2^p |G|^p.$$

Como $G \in L_p$, notamos que la sucesión $|f - \hat{f}_n|^p$ para $n \in \mathbb{N}$ está dominada por una función integrable.

Además, debido a la convergencia puntual c.t.p. $\hat{f}_n(x) \to f(x)$,

$$\lim_{n\to\infty} |f(x) - \hat{f}_n(x)|^p = 0 \text{ c.t.p.}$$

Por lo tanto las condiciones del teorema de la convergencia dominada de Lebesgue son satisfechas y tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \int |f - \hat{f}_n|^p dx = \int 0 dx = 0.$$

Pero esto simplemente significa que $\|f - \hat{f}_n\| \to 0$ cuando $n \to \infty$, es decir, la sucesión $\{\hat{f}_n\}$ converge según la norma a la función f, la cual hemos demostrado que pertenece a L_p. La convergencia de la sucesión $\{\hat{f}_k\}$ implica la convergencia de la sucesión de Cauchy original $\{f_n\}$. Por lo tanto, L_p es un espacio de Banach. $\clubsuit$.

5. Series en espacios de Banach

Definición: Decimos que la serie $\sum_{n=1}\infty x_n$ es absolutamente convergente si la serie real $\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|$ converge.

La convergencia absoluta de series permite caracterizar a los espacios de Banach gracias al siguiente teorema. **Teorema**: *Un espacio normado X es de Banach sí y sólo si toda serie en X absolutamente convergente es convergente.*

Demostración: $\Rightarrow$) Sea X un espacio de Banach y $\{x_n\}\subset X$ tal que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ es absolutamente convergente. Definimos las sumas parciales

$$s_N=\sum_{n=1}^{N}x_n,\qquad r_N=\sum_{n=1}^{N}\|x_n\|.$$

$\{r_N\}$ es una sucesión convergente y por lo tanto es de Cauchy. Veamos que $\{s_N\}$ también es de Cauchy:

$$\|s_M-s_N\|=\|\sum_{N+1}^{M}x_n\|\leq\sum_{N+1}^{M}\|x_n\|=|r_M-r_N|.$$

Como el espacio X es completo, entonces $\{s_N\}$ converge, es decir, existe $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$.

$\Leftarrow$) Sea ahora $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy. Elejimos $n_1\in\mathbb{N}$ tal que para $n\geq n_1$ se satisfaga

$$\|x_n-x_{n_1}\|<\frac{1}{2}$$

Luego elejimos $n_2>n_1$ tal que para $n\geq n_2$ valga

$$\|x_n-x_{n_2}\|<\frac{1}{2^2}.$$

Repitiendo este procedimiento nos generamos una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ tal que

$$\|x_{n_{k+1}}-x_{n_k}\|\leq\frac{1}{2^k}.$$

Entonces

$$\sum_{k=1}^{\infty}\|x_{n_{k+1}}-x_{n_k}\|\leq\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}=1,$$

por lo cual la serie $\sum_{k=1}^{\infty}(x_{n_{k+1}}-x_{n_k})$ es absolutamente convergente, y por hipótesis es convergente. Sea

$$x=\lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}(x_{n_{k+1}}-x_{n_k})=\lim_{N\to\infty}(x_{n_{N+1}}-x_{n_1}),$$

entonces $\lim_{N\to\infty}x_{n_N}=x+x_{n_1}$ y resulta que $\{x_{n_k}\}$ es convergente. Como la sucesión original $\{x_n\}$ es de Cauchy y contiene una subsucesión convergente, entonces la propia sucesión es convergente. ♣.

6. Operadores lineales

Un *operador lineal* T entre espacios vectoriales X e Y es una función $T:X\to Y$ tal que cumple

$$T(\alpha x+\beta y)=\alpha T(x)+\beta T(y),\qquad\forall\alpha,beta\in\mathbb{C}(\text{o }\mathbb{R})\text{ y }x,y\in X.$$

Si $T : X \to Y$ es biyectiva decimos que T es *no singular* o *inversible* y definimos el operador inverso $T^{-1} : Y \to X$ mediante $T^{-1}(y) = x$ sí y sólo si $Tx = y$, es decir $T.T^{-1} = T^{-1}T = I$. La linealidad de T implica la linealidad de T^{-1}.

6.1. Operadores acotados

Si X e Y son espacios normados podemos definir la noción de un operador lineal *acotado*, y como veremos la acotabilidad de un operador es equivalente a su continuidad.

Definición: Sean X e Y dos espacios normados. Un operador $T : X \to Y$ es *acotado* si existe una constante $M \geq 0$ tal que

$$\|Tx\|_Y \leq M\|x\|_X \quad \forall x \in X.$$

Si no existe una constante que satisfaga esta desigualdad diremos que T es *no acotado*. Si $T : X \to Y$ es un operador lineal acotado, definimos la *norma de operador* $\|T\|$ de T mediante

$$\|T\| = \text{ínf}\{M / \|Tx\| \leq M\|x\| \forall x \in X\}.$$

Definimos al conjunto de todos los operadores lineales $T : X \to Y$ mediante $\mathcal{L}(X, Y)$, y al conjunto de todos los operadores acotados lineales $T : X \to Y$ mediante $\mathcal{B}(X, Y)$.

Expresiones equivalente de $\|T\|$ son:

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}; \quad \|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\|; \quad \|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|.$$

Ejemplos: El operador lineal $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definido mediante $Ax = ax$ donde $a \in \mathbb{R}$ es acotado y su norma $\|A\| = |a|$.

El operador identidad $I : X \to X$ es acotado en cualquier espacio normado X y tiene norma 1. Si un operador tiene norma cero, entonces es el operador idénticamente nulo.

Sea $X = C^\infty([0, 1])$ el espacio de todas las funciones suaves en $[0, 1]$ que tienen derivadas continuas a todos los órdenes, equipado con la norma del máximo. El espacio X es normado, pero no es un espacio de Banach porque es incompleto. El operador diferenciación $Du = u'$ es un operador lineal no acotado $D : X \to X$. Por ejemplo, la función $u(x) = e^{\lambda x}$ es una autofunción de D para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$, es decir, satisface $Du = \lambda u$. Por lo tanto $\|Du\|/\|u\| = |\lambda|$ puede ser arbitrariamente grande. El carácter no acotado de los operadores diferenciales es la dificultad fundamental para sus estudios.

Teorema: *Un operador lineal es acotado sí y sólo si es continuo.*

Demostración: Supongamos que $T : X \to Y$ es acotado. Entonces, para todos $x, y \in X$ vale

$$\|Tx - Ty\| = \|Tx - Ty\| \leq M\|x - y\|,$$

donde M es una constante. Podemos tomar $\delta = \epsilon/M$ en la definición de continuidad, y entonces T resulta ser continua.

Ahora supongamos que T es continua en 0. Como T es lineal, tenemos $T(0) = 0$. Eligiendo $\epsilon = 1$ en la definición de continuidad, obtenemos que existe un $\delta > 0$ tal que $\|Tx\| \leq 1$ siempre que $\|x\| \leq \delta$. Para cualquier $x \in X$, con $x \neq 0$, definimos $\hat{x}$ mediante

$$\hat{x} = \delta \frac{x}{\|x\|x}.$$

Entonces $\|\hat{x}\| \leq \delta$, y $\|T\hat{x}\| \leq 1$. De la linealidad de T sigue que

$$\|Tx\| = \frac{\|x\|}{\delta}\|T\hat{x}\| \leq M\|x\|,$$

donde $M = 1/\delta$. Por lo tanto, T es acotado. $\clubsuit$.

La demostración anterior nos dice que si T es continua en 0 entonces es continua en todo el espacio. Un operador no lineal puede ser acotado pero discontinuo, o continuo en cero pero discontinuo en otros puntos.

6.2. Espacio de operadores acotados, $B(X,Y)$

El conjunto $B(X,Y)$ de operadores lineales acotados desde un espacio normado X a un espacio normado Y es un espacio vectorial respecto a las definiciones naturales de suma y multiplicación por escalar:

$$(S+T)x = Sx + Tx, \qquad (\lambda T)x = \lambda(Tx).$$

Es fácil chequear que la norma de operador definida antes

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|},$$

define una norma en $B(X,Y)$ y por lo tanto $B(X,Y)$ resulta ser un espacio normado.

La composición de dos operadores lineales es lineal y el siguiente teorema nos dice que la composición de operadores acotados es acotado.

Teorema:*Sean X, Y y Z espacios normados. Si $T \in B(X,Y)$ y $S \in B(Y,Z)$, entonces $ST \in B(X,Z)$ y vale*

$$\|ST\| \leq \|S\|.\|T\|.$$

Demostración: Para todo $x \in X$ tenemos

$$\|STx\| \leq \|S\|\|Tx\| \leq \|S\|.\|T\|.\|x\|. \quad \clubsuit.$$

Por ejemplo, si $T \in B(X)$ entonces $T^n \in B(X)$ y $\|T^n\| \leq \|T\|^n$.

Un espacio vectorial con un producto definido en él se llama **álgebra**. La composición de operadores define un producto en el espacio $B(X)$ de operadores acotados lineales de X en sí mismo, por lo tanto $B(X)$ es un álgebra. El álgebra es asociativa, es decir $(RS)T = R(ST)$, pero no es *conmutativa*, generalmente $TS \neq ST$. Si $S, T \in B(X)$, definimos el **conmutador**

$$[S,T] = ST - TS.$$

Definición: Si $\{T_n\}$ es una sucesión de operadores en $B(X,Y)$ y

$$\lim_{n\to\infty} \|T_n - T\| = 0$$

para algún $T \in B(X,Y)$, decimos que T_n converge uniformemente a T.

6.3. ¿Cuándo es $B(X,Y)$ un espacio de Banach?

Teorema:*Si X es un espacio normado e Y es un espacio de Banach, entonces $B(X,Y)$ es un espacio de Banach con respecto a la norma operador.*

Demostración: Debemos probar que $B(X,Y)$ es completo. Sea $\{T_n\}$ una sucesión de Cauchy en $B(X,Y)$. Para cada $x \in X$ tenemos

$$\|T_n x - T_m x\| \leq \|T_n - T_m\|\|x\|,$$

lo que muestra que $\{T_n x\}$ es una sucesión de Cauchy en Y. Como Y es completo, existe $y \in Y$ tal que $Tx_n \to y$. Es simple chequear que $Tx = y$ define un operador lineal $T : X \to Y$. Ahora vamos a mostrar que T es acotado. Para cada $\epsilon > 0$, sea N_ϵ tal que $\|T_n - T_m\|\epsilon/2$ para todos $n, m \geq N_\epsilon$. Tomemos $n \geq N_\epsilon$, luego para cada $x \in X$ existe un $m(x) \geq N_\epsilon$ tal que $\|T_{m(x)}x - Tx\| \leq \epsilon/2$. Si $\|x\| = 1$, tenemos

$$\|T_n x - Tx\| \leq \|T_n x = T_{m(x)}x\| + \|T_{m(x)}x - Tx\| \leq \epsilon. \tag{4}$$

Resulta que si $n \geq N_\epsilon$, entonces

$$\|Tx\| \leq \|T_n x\| + \|Tx - T_n x\| \leq \|T_n\| + \epsilon$$

para todos los puntos x con $\|x\| = 1$, por lo cual T es acotado. Finalmente, por la desigualdad (4) vale $\lim_{n\to\infty} \|T_n - T\| = 0$. Luego, $T_n \to T$ en la norma operador. $\clubsuit$.

Como aplicación de la idea de convergencia de operadores, definimos la *exponencial* de un operador, y la usamos para resolver una ecuación de evolución lineal. Si $A : X \to X$ es un operador lineal acotado en un espacio de Banach X, por analogía con la expansión en series de e^x definimos

$$e^A = I + A + \frac{1}{2}A^2 + \cdots + \frac{1}{n!}A^n + \cdots.$$

Como la serie real

$$e^{\|}A\| = 1 + \|A\| + \frac{1}{2}\|A\|^2 + \cdots + \frac{1}{n!}\|A\|^n + \cdots.$$

es convergente, entonces la serie de e^A tes absolutamente convergente en $B(X)$ y es por lo tanto convergente. Además se tiene

$$\|e^A\| \leq e^{\|A\|}.$$

7. Espacios de Banach de dimensión finita

En esta sección probaremos que todo espacio normado de dimensión finita es un espacio de Banach, que todo operador lineal en un espacio de dimensión finita es continuo, y que todas las normas en un espacio de dimensión finita son equivalentes. Ninguna de estas afirmaciones es cierta en los espacios de infinito dimensionales. En consencuencia, las consideraciones topológicas pueden ser despreciadas en los espacios de dimensión finita, pero son de crucial importancia cuando nos manejamos con espacios de dimensión infinita.

8. Operadores compactos

Una clase particularmente importante de operadores lineales es la de los operadores *compactos*. El porqué de esta importancia se verá cuando estudiemos el problema de autovalores y autovectores de operadores (teoría espectral).

Definición: Un operador lineal $T : X \to Y$ es *compacto* si la clausura de $T(B)$ es un subconjunto compacto de Y para todo subconjunto acotado B de X.

Una formulación equivalente es la siguiente: T es compacto sí y sólo si para cada sucesión acotada $\{x_n\}$ en X tiene una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ tal que Tx_{n_k} converge en Y. No pedimos que el rango de T sea cerrado, por lo cual $T(B)$ no necesita ser compacto aún si B es un conjunto cerrado y acotado.

Teorema: *(a) Un operador compacto es acotado.*
(b) La composición de un operador compacto con un operador acotado, en cualquier orden, es

compacto.
(c) El límite uniforme de una sucesión de operadores compactos es compacto.
(d) Un operador acotado con un rango de dimensión finita es compacto.

Demostración: (a) La clausura de la imagen a través del operador compacto T de un subconjunto acotado cualquiera $B \subset X$, $\overline{T(B)}$ es compacto, por lo tanto es acotado. $T(B) \subset \overline{T(B)}$ también es acotado. Por lo tanto

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| < \infty.$$

La proposición inversa no es verdadera, pero si a la cualidad de acotado agregamos alguna otra propiedad del operador, éste puede resultar compacto.

(d) Si T es acotado, entonces para cada $x \in B_1(0)$ tenemos $\|Tx\| \leq \|T\|$, por lo tanto $T(B_1(0))$ es un conjunto acotado. La clausura $\overline{T(B_1(0))}$ es un subespacio de X acotado y cerrado