Espacios métricos[1]

1. Introducción

La geometría del espacio tridimensional en el que estamos sumergidos nos resulta muy natural. Conceptos tales como distancia, longitud, ángulo, perpendicularidad son de uso cotidiano. En matemáticas frecuentemente podemos agrupar ciertos objetos en espacios abstractos y definir entre ellos relaciones semejantes a las existentes entre los puntos del espacio ordinario. El paralelismo que se establece así entre los espacios abstractos y el espacio euclideano nos permite visualizar y lograr un entendimiento más profundo de estos objetos.

En algunas aplicaciones el planteo más simple que puede usarse es el de espacio métrico. Un espacio métrico es un conjunto de puntos en los que está definido la noción de distancia entre puntos. Podemos usar la función distancia o *métrica* para definir los conceptos fundamentales del análisis, tales como convergencia, continuidad y compacidad.

Un espacio métrico no necesita tener ninguna clase de estructura algebraica definida en él, es decir, puede no tener sentido la suma de elementos del espacio o la multiplicación de un elemento por un número real o complejo. Sin embargo, es muy frecuente el uso de espacios métricos que son a su vez espacios vectoriales, con una métrica derivada de una norma que mide la *longitud* de un vector. Tales espacios serán llamados espacios normados. Una buena parte de la materia estará destinada al estudio de espacios normados de infinita dimensiones, incluyendo los espacios funcionales en los cuáles un punto representa una función (de allí el nombre de *análisis funcional* que recibe este área de las matemáticas). La intuición geométrica derivada de los espacios euclideanos de dimensiones finitas es esencial, aunque características completamente nuevas surgen en los espacios de infinitas dimensiones.

2. Métricas

Si a y b son dos números reales, puede pensarse al número real no negativo $|a-b|$ como la *distancia* que separa a de b. Esta operación de asignar distancias a pares de puntos es precisamente lo que da origen a los *espacios métricos*. La teoría básica que emana del concepto de distancia tiene que ver con las propiedades de subconjuntos (abiertos, cerrados, compactos, conexos), sucesiones (convergentes, Cauchy) y funciones (continuas), y la relación entre estas nociones.

Definición: Un espacio métrico es un par (X, d) donde X es un conjunto no vacío y d es una función real definida en $X \times X$, llamada distancia o *métrica*, y que satisface los siguientes axiomas:

i) $d(x,y) \geq 0 \;\; \forall x, y \in X$, y $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

ii) $d(x,y) = d(y,x) \quad \forall x, y \in X$, y

iii) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \quad \forall x, y, z \in X$.

Es decir,

[1]Notas preparadas por Luis O. Manuel

a) Las distancias son no negativas y el único punto a distancia cero de x es el mismo x;

b) la distancia es una función simétrica;

c) la distancia satisface la desigualdad triangular: la longitud de un lado de un triángulo es menor que la suma de las longitudes de los otros dos lados.

Para un dado conjunto X es posible definir más de una métrica. Cuando la métrica del espacio se da por sobreentendida, hablaremos simplemente del espacio métrico X aunque sabemos que realmente éste es un par (X, d). A los elementos de X los llamaremos *puntos* del espacio métrico.

3. Ejemplos de espacios métricos

1. `Espacio métrico discreto`
   Dado un conjunto no vacío cualquiera X definimos la métrica discreta d en X mediante

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}.$$

   Se cheque fácilmente que (X, d) es un espacio métrico.

2. `La recta real` $\mathbb{R}$
   Sea $X = \mathbb{R}$, $\quad d(x, y) = |x - y|$ para cada $x, y \in \mathbb{R}$. Los axiomas métricos se cumplen. El conjunto de números complejos $\mathbb{C}$ con la función distancia $d(z, w) = |z - w|$ también es un espacio métrico.

3. `El espacio euclídeo` $\mathbb{R}^n$
   Sea $X = \mathbb{R}^n$, el conjunto de todas las n-uplas de números reales. Si $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ son elementos de X, definimos la distancia

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

   Puede verificarse fácilmente que se cumplen los dos primeros axiomas métricos. La desigualdad triangular se escribe como

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k - z_k|^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |z_k - y_k|^2} = d(x, z) + d(z, y).$$

   Si en la desigualdad anterior reemplazamos $x_k - z_k = a_k$ y $z_k - y_k = b_k$, por lo tanto $x_k - y_k = a_k + b_k$, y la desigualdad se escribe como

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}.$$

Esta última desigualdad se deduce a partir de la desigualdad de Cauchy-Buniakovski-Schwarz (CBS)[2]

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq \sum_{k=1}^{n} a_k^2 . \sum_{k=1}^{n} b_k^2 .$$

En efecto, usando la desigualdad CBS tenemos

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} a_k b_k + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \leq$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2} + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 = \left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}\right).$$

4. `El espacio` $(\mathbb{R}^n, d_p)$
Sea X el mismo conjunto del item anterior, pero definimos la distancia d_p entre x e y mediante

$$d_p(x,y) = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

donde p es un número fijo mayor o igual a 1. Los axiomas métricos se cumplen. Para verificar la desigualdad triangular hacemos el mismo reemplazo que en el ejemplo anterior, y debemos entonces demostrar la llamada desigualdad de Minkowski

$$[\text{Minkowski}] \qquad \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Para $p = 1$ la desigualdad es trivial, para $p > 1$ su demostración se basa en la desigualdad de Hölder, que es una versión generalizada de CBS:

$$[\text{Hölder}] \qquad \sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{1/p} . \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q\right)^{1/q}, \tag{1}$$

donde los números $p > 1$ y $q > 1$ cumplen la condición

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

A continuación demostraremos (1). Consideremos la función $y(t) = t^\alpha$ con $\alpha > 0$. Puesto que $y'(t) = \alpha t^{\alpha-1} > 0$ para $t > 0$, $y(t)$ es una función creciente para t positivos. Para esos mismos t la función inversa $t = y^{1/\alpha}$ está definida. Representemos gráficamente la función y, eligiendo dos números reales positivos a y b y marcando los puntos correspondientes en los ejes t y y, respectivamente, y dibujemos lineas rectas paralelas a los ejes.

[2] La desigualdad CBS se obtiene de la siguiente identidad, fácil de comprobar directamente,

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 . \sum_{k=1}^{n} b_k^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_i b_j - b_i a_j)^2 .$$

Obtendremos dos "triángulos", limitados por las lineas, los ejes y la curva y, cuyas áreas son

$$A_1 = \frac{a^{\alpha+1}}{\alpha+1} \qquad \text{y} \qquad A_2 = \frac{b^{\frac{1}{\alpha}}}{\frac{1}{\alpha}+1}.$$

Por otro lado, es claro que se cumple $A_1A_2 \geq ab$. Escribimos $\alpha + 1 = p$ y $\frac{1}{\alpha} + 1 = q$, vale entonces

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Por lo tanto, para cualquieras a y b reales positivos, y par conjugado p, q vale

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \tag{2}$$

Poniendo en (2)

$$a = \frac{|a_k|}{\left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p\right)^{1/p}}, \qquad b = \frac{|b_k|}{\left(\sum_{i=1}^n |b_i|^q\right)^{1/q}}$$

y sumando sobre el índice k obtenemos la desigualdad de Hölder (1).

Ahora vamos a demostrar la desigualdad de Minkowski. Consideremos la identidad

$$(|a| + |b|)^p = (|a| + |b|)^{p-1}\,|a| + (|a| + |b|)^{p-1}\,|b|.$$

Reemplacemos $a = a_k, b = b_k$ y sumemos sobre el índice k

$$\sum_{k=1}^n (|a_k| + |b_k|)^p = \sum_{k=1}^n (|a_k| + |b_k|)^{p-1}|a_k| + \sum_{k=1}^n (|a_k| + |b_k|)^{p-1}|b_k|.$$

Aplicamos a cada una de las sumas de la derecha la desigualdad de Hölder y tenemos en cuenta que $(p-1)q = p$, encontramos

$$\sum_{k=1}^n (|a_k| + |b_k|)^p \leq$$

$$\leq \left(\sum_{k=1}^n (|a_k| + |b_k|)^p\right)^{1/q} \left(\left[\sum_{k=1}^n |a_k|^p\right]^{1/p} + \left[\sum_{k=1}^n |b_k|^p\right]^{1/p}\right).$$

Dividiendo ambas partes por

$$\left(\sum_{k=1}^n (|a_k| + |b_k|)^p\right)^{1/q},$$

obtenemos

$$\left(\sum_{k=1}^n (|a_k| + |b_k|)^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

y de aquí se deduce inmediatamente la desigualdad de Minkowski.

Casos particulares de los espacios $(\mathbb{R}^n, d_p)$:

a) Si $p=1$ se obtiene la llamada métrica de Manhattan

$$d_1(x,y)=\sum_{k=1}^{n}|x_k-y_k|.$$

Este métrica mide la distancia recorrida por un peatón de un punto a otro en una ciudad cuadriculada.

b) Si $p=2$ recobramos el espacio euclídeo.

c) Si $p\to\infty$ la distancia resulta

$$d_\infty(x,y)=\max_{1\leq i\leq n}|x_i-y_i|.$$

5. `El espacio de las sucesiones` l_p

Sea X el conjunto de las sucesiones de números reales $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tales que

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p<\infty,$$

para un número fijo $p\geq 1$. Definimos la distancia entre $x=\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $y=\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ como

$$d_p(x,y)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n-y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3}$$

Otra vez, los dos primeros axiomas métricos son directos. De acuerdo con la desigualdad de Minkowski, para n cualquiera vale

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k-y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leq\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Por hipótesis las series

$$\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p,\qquad\sum_{k=1}^{\infty}|y_k|^p$$

convergen, por lo tanto, pasando al límite para $n\to\infty$, obtenemos

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k-y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leq\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{k=1}^{\infty}|y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}<\infty.$$

Esto demuestra que la distancia (3) tiene sentido para cualquier $x,y\in l_p$, además muestra que se satisface la desigualdad triangular.

El espacio l_2 es llamado el *espacio de Hilbert de las coordenadas.* Para $p<\infty$ los elementos de l_p son sucesiones que necesariamente deben converger a cero, los elementos de l_∞ sólo necesitan estar acotados, $d_\infty(x,y)=\sup_{n\in\mathbb{N}}\{|x_n-y_n|\}$.

6. `El espacio de las funciones continuas` $C([a,b])$

Sea X el conjunto de las funciones continuas definidas en el intervalo $[a,b]$. Introducimos una métrica en X mediante

$$d(f,g)=\max_{t\in[a,b]}|f(t)-g(t)|.$$

Esta función satisface los axiomas métricos. En $C([a,b])$ podemos definir una métrica diferente mediante

$$d_2(f,g)) = \sqrt{\int_a^b (f(t)-g(t))^2 dt}.$$

7. `El espacio de las funciones de potencia` p `integrables,` L_p
   Sea E un espacio provisto de una medida μ. Consideremos el conjunto de todas las funciones de potencia p integrables ($p \geq 1$) en E, es decir, aquellas funciones que cumplen

   $$\int_E |f|^p d\mu < \infty.$$

   Simbolizaremos a este espacio como $L_p(E)$, L por Lebesgue. Definimos en estos espacios la métrica

   $$d(f,g) = \left(\int_E |f(t)-g(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

   Dos funciones equivalentes (es decir, funciones cuyos valores sólo difieren en un conjunto de medida nula) serán consideradas la misma función para poder satisfacer el primer axioma de espacio métrico. Esto significa que los elementos de los espacios L_p no son realmente funciones, sino clases de equivalencia de funciones. Claramente estos espacios no son para usar cuando algo de significancia depende del valor de la función en un punto preciso. Sin embargo, son de utilidad en física, porque nunca podemos medir una cantidad en una posición exacta en el espacio o el tiempo. Usualmente medimos cierto promedio local. La métrica satisface la desigualdad triangular, la cual se demuestra utilizando la desigualdad de Minkowski para integrales

   $$\left(\int_E |f(t)+g(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_E |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_E |g(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

   Esta desigualdad se prueba en forma análoga al caso $(\mathbb{R}^n, d_p)$, basta reemplazar en aquella demostración el índice discreto k por la variable de integración t y las sumas sobre k por las integrales sobre E. La desigualdad de Minkowski demuestra, además, que si $f, g \in L_p(E)$ entonces $f+g$ también es de potencia p integrable.

   El espacio L_2 es llamado el *espacio de Hilbert funcional* y juega un rol esencial en la física: es el espacio natural de la mecánica cuántica.

4. Definiciones topológicas

Ahora que tenemos definida una distancia entre puntos de un espacio métrico, podemos dar algunas definiciones topológicas. Sea (X,d) un espacio métrico, A un subconjunto de X.

1. Un **entorno o bola abierta** de radio r y centro x es el conjunto $B_r(x) = \{y \in X : d(x,y) < r\}$, donde $x \in X$ y $r > 0$.

2. Un **entorno o bola cerrada** de radio r y centro x es el conjunto $\overline{B}_r(x) = \{y \in X : d(x,y) \leq r\}$, donde $x \in X$ y $r > 0$.

3. $a \in X$ es un **punto de acumulación** de A si cada entorno abierto de centro a contiene al menos un punto de A distinto de a, es decir, si $(A - \{a\}) \cap B_r(a) \neq \emptyset$ para cualquier $r > 0$.

4. Un punto $x \in X$ pertenece al **interior** de A si existe $r > 0$ tal que $x \in B_r(x) \subset A$.

5. x es un punto aislado de A si existe $r > 0$ tal que $(A - \{x\}) \cap B_r(x) = \emptyset$.

6. El conjunto que se obtiene de agregar a A todos sus puntos de acumulación es el conjunto **clausura** de A, simbolizado $[A]$. Es decir, x pertenece a $[A]$ si cada entorno abierto que contiene a x tiene una intersección no vacía con A.

7. A es **cerrado** si $A = [A]$. La clausura de A es el conjunto cerrado más pequeño que contiene a A.

8. A es **abierto** si su complemento $X - A$ es cerrado. También: A es abierto si para todo $x \in A$ existe $r > 0 : B_r(x) \subset A$.

9. A es **denso** en $B \subset X$ si $B \subset [A]$. De otra manera: A es denso en B si para cada $y \in B$ cada entorno abierto que contiene a y tiene intersección no vacía con A. O también: A es denso en B si para cada $y \in B$ existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ contenida en A que converge hacia y.

10. A es **siempre denso** si $[A] = X$.

11. A es **nunca denso** en el espacio X si cada entorno abierto de X contiene un entorno abierto cuya intersección con el conjunto A es el conjunto vacío.

12. Un espacio X es **separable** si contiene un conjunto siempre denso y numerable. En otras palabra, si existe en X una sucesión $\{x_1, x_2, \cdots\}$ tal que para cada $x \in X$ existe una subsucesión $\{x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots\}$ tal que converge a x.

5. Definiciones analíticas

1. Un elemento x de un espacio métrico X es llamado **límite** de una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de X si $d(x_n, x) \to 0$ cuando $n \to \infty$. Lo simbolizamos como $x_n \to x$ o $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Vemos que x es el límite de una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sí y sólo si cada entorno abierto de centro x contiene todos los puntos de la sucesión a partir de cierto índice n. Cuando una sucesión tiene límite se dice que es convergente.

2. Una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de X es una **sucesión de Cauchy** o **fundamental** si para cada $\epsilon > 0$ existe un índice n_ϵ tal que $d(x_n, x_m) < \epsilon$ para todos $m, n \geq n_\epsilon$. Toda sucesión convergente es de Cauchy, este hecho es una consecuencia inmediata de la desigualdad triangular, pero no toda sucesión de Cauchy es convergente.

3. Si toda sucesión de Cauchy de un espacio métrico X tiene un límite en X, entonces X es llamado un espacio métrico **completo**. Es decir, un espacio métrico X es completo si cada punto que debería estar, está.

4. Dados (X, d_X) y (Y, d_Y) espacios métricos, una función $f : X \to Y$ es continua en $x_0 \in X$ sí y sólo si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $d_Y(f(x), f(x_0)) < \epsilon$ si $d_X(x, x_0) < \delta$.

   Ejemplo: sea $a \in X$, y definimos $f : X \to \mathbb{R}$ mediante $f(x) = d_X(x, a)$. Entonces f es continua en X, es decir la función distancia es una función continua.

5. Existe una manera útil de caracterizar a las funciones continuas en espacios métricos: diremos que una función $f : X \to Y$ es secuencialmente continua en $x \in X$ si para toda sucesión $\{x_n\}$ que converge a x en X, la sucesión $\{f(x_n)\}$ converge a $f(x)$ en Y.

Proposición: Una función es continua en x sí y sólo si es secuencialmente continua en x.
Demostración: Supongamos que f es continua en x, y que $x_n \to x$. Sea $\epsilon > 0$ dado. Debido a la continuidad de f, podemos elegir $\delta > 0$ tal que si $d(x, x_n) < \delta$ entonces $d(f(x), f(x_n)) < \epsilon$. Por la convergencia de $\{x_n\}$, podemos elegir N tal que $n \geq N$ implica que $d(x, x_n) < \delta$. Por lo tanto, $n \geq N$ implica $d(f(x), f(x_n)) < \epsilon$ y $f(x_n) \to f(x)$.

Para probar la implicancia opuesta, mostraremos que si f es discontinua, entonces no es secuencialmente continua. Si f es discontinua en x, existe luego un $\epsilon > 0$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in X$ con $d(x, x_n) < 1/n$ y $d(f(x), f(x_n)) \geq \epsilon$. La sucesión $\{x_n\}$ converge a x pero $\{f(x_n)\}$ no converge a $f(x)$.

6. Convergencia

Como existe más de una manera de medir la distancia entre dos elementos de un espacio métrico, la convergencia de una sucesión de, por ejemplo, funciones f_n a la función límite f no es tan simple como el concepto de convergencia de una sucesión de números reales x_n al límite x. Convergencia significa que la distancia entre f_n y la función límite f se hace cada vez más pequeña a medida que n aumenta, por lo que cada métrica nos da una nueva noción de lo que significa converger. Esta distinción entre distintas formas de convergencia no es meramente académica: por ejemplo, los ingenieros deben ser precisos acerca del tipo de errores que están preparados para tolerar, o sino, los edificios que diseñan podrían colapsar. Estas son algunas de las formas más comunes de convergencia en espacios funcionales:

(i) Si, para todo x en su dominio de definición $\mathcal{D}$, el conjunto de números $f_n(x)$ converge a $f(x)$, decimos que la sucesión converge puntualmente.

(ii) Si la máxima separación
$$\sup_{x \in \mathcal{D}} |f_n(x) - f(x)|$$
va hacia cero a medida que $n \to \infty$, decimos que f_n converge a f uniformemente en $\mathcal{D}$.

(iii) Si
$$\int_{\mathcal{D}} |f_n(x) - f(x)| dx$$
va a cero cuando $n \to \infty$, decimos que f_n converge en media a f en $\mathcal{D}$.

La convergencia uniforme implica la convergencia puntual, pero no ocurre lo contrario. Si $\mathcal{D}$ es un intervalo finito, entonces la convergencia uniforme implica la convergencia en media, pero la convergencia en media no implica ni la convergencia uniforme, ni siquiera la convergencia puntual. El ejemplo clásico es la sucesión $f_n = x^n$ y $\mathcal{D} = [0, 1)$. A medida que n aumenta $f_n(x) \to 0$ puntualmente en $\mathcal{D}$, pero la convergencia no es uniforme porque
$$\sup_{x \in \mathcal{D}} |f_n(x) - f(x)| = 1$$
para todo n. Ahora, si $\mathcal{D} = [0, 1]$, entonces f_n no converge ni uniforme ni puntualmente a cero, pero si lo hace en media.

Consideremos la convergencia en el espacio de funciones continuas $C([a, b])$ con la métrica del máximo. Dado una sucesión $\{f_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de $C_{[a,b]}$ que converge a $f(t)$, tenemos que $d(f_n, f) \to 0$ cuando $n \to \infty$. Es decir, dado $\epsilon > 0$ existe n_ϵ tal que $\text{máx}_{t \in \mathbb{N}} |f_n(t) - f(t)| < \epsilon$ para $n \geq n_\epsilon$. Por lo tanto, $|f_n(t) - f(t)| < \epsilon$ para todo $n \geq n_\epsilon$ y para todo $t \in [a, b]$. Esto significa que

$\{f_n(t)\}$ converge uniformemente hacia $f(t)$. Entonces la convergencia determinado por la métrica del máximo en $C_{[a,b]}$ es la convergencia uniforme en el intervalo $[a,b]$.

Sea ahora $\{f_n(t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones de $L_p([a,b])$ que converge a $f(t)$, entonces

$$\int_a^b |f_n(t) - f(t)|^p dt \to 0$$

cuando $n \to \infty$. Decimos entonces que la sucesión de funciones $\{f_n(t)\}$ converge en media a la p-potencia de la función $f(t)$. Para $p = 2$ diremos que la convergencia es en media o cuadrática.

7. Métricas equivalentes

Veremos ahora que el hecho de que una función sea continua o no, o que una sucesión sea o no convergente no depende de una métrica específica, sino de clases equivalentes de métricas. Notemos que un dado conjunto X puede tener muchas métricas. Por ejemplo, si d es una métrica, también lo será αd para cada α positivo.

Definición: Dos métricas d_1 y d_2 en un conjunto X son *equivalentes* si existen $\alpha, \beta > 0$ tal que $\alpha d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq \beta d_1(x,y)$ para todos $x, y \in X$.

Ejercicio: Sean d_1 y d_2 métricas equivalentes en X. Si $f : X \to \mathbb{R}$ es continua respecto de d_1, también lo será respecto a d_2.

8. Separabilidad

`Separabilidad del espacio euclídeo` n`-dimensional`
El conjunto $\mathbb{Q}^n$ que consiste de todos los puntos de $\mathbb{R}^n$ con coordenadas racionales es numerable y siempre denso en $\mathbb{R}^n$.

`Separabilidad de` $C_{[0,1]}$ En el espacio de las funciones continuas $C_{[0,1]}$ consideremos el subconjunto C_0 de todos los polinomios a coeficientes racionales. C_0 es numerable y debemos demostrar que también es siempre denso en $C_{[0,1]}$. Si tomamos una función arbitraria $f \in C_{[0,1]}$, de acuerdo al teorema de Weierstrass, dado un ϵ positivo, existe un polinomio P tal que

$$\max_{t\in[0,1]} |f(t) - P(t)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Obviamente existe otro polinomio P_0 a coeficientes racionales tal que

$$\max_{t\in[0,1]} |P(t) - P_0(t)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Por lo tanto, $d(f,P) = \max_{t\in[0,1]} |f(t) - P_0(t)| < \epsilon$.

9. Compacidad

La compacidad es uno de los conceptos más importantes del análisis. Puede pensarse a la compacidad como una "finitud aproximada", o como una generalización de la noción de finitud a los espacios de infinitas dimensiones.

Una manera simple y útil para definir conjuntos compactos en espacios métricos es mediante sucesiones.

Definición: Un subconjunto K de un espacio métrico X es *secuencialmente compacto* si cada sucesión en K tiene una subsucesión convergente cuyo límite pertenece a K.

Ejemplo: El espacio de los números reales $\mathbb{R}$ no es secuencialmente compacto. Por ejemplo, la sucesión $\{x_n\}$ con $x_n = n$ no tiene ninguna subsucesión convergente porque $|x_m - x_n| \geq 1$ para todo $m \neq n$. El intervalo cerrado y acotado $[0,1]$ es un subconjunto secuencialmente compacto en $\mathbb{R}$. El intervalo semiabierto $(0,1]$ no es secuencialmente compacto, porque la sucesión $\{1/n\}$ converge a 0, y por lo tanto no tiene ninguna subsucesión con límite en $(0,1]$. Sin embargo, el límite pertenece a $[0,1]$.

La importancia de los conjuntos compactos estará claramente establecida en los espacios normados infinito dimensionales. Conviene sin embargo comenzar con el caso finito-dimensional. Los subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^n$ tiene una caracterización simple y explícita de acuerdo al teorema de Heine-Borel.

Teorema de Heine-Borel: *Un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ es secuencialmente compacto sí y sólo si es cerrado y acotado.*

El hecho de que los subconjuntos cerrados y acotados de $\mathbb{R}^n$ son secuencialmente compactos es una consecuencia del siguiente teorema, llamado teorema de Bolzano-Weierstrass.

Teorema de Bolzano-Weierstrass: *Toda sucesión acotada de $\mathbb{R}^n$ tiene una subsucesión convergente.*

El siguiente criterio para determinar la compacidad secuencial en espacios métricos es usualmente más fácil de verificar que la definición dada anteriormente. Sea A un subconjunto de un espacio métrico X. Decimos que una colección (numerable o no) $\{G_\alpha\}$ de subconjuntos de X es un *cubrimiento* de A si su unión contiene a A, es decir

$$A \subset \cup_\alpha G_\alpha.$$

Si cada G_α es abierto, decimos que $\{G_\alpha\}$ es un *cubrimiento abierto.*

Sea $\epsilon > 0$. Un subconjunto $\{x_\alpha\}$ es llamada una *epsilon-red* del subconjunto A si la familia de entornos $\{B_\epsilon(x_\alpha)$ es un cubrimiento abierto de A. Si el conjunto de puntos $\{x_\alpha\}$ es dinito, decimos que es una epsilon-red finita.

Definición: Un subconjunto de un espacio métrico es **totalmente acotado** si tiene una epsilon-red finita para cada $\epsilon > 0$, es decir, para cada $\epsilon > 0$ existe un conjunto finito de puntos $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ en X tal que $A \subset \cup_{k=1}^n B_\epsilon(x_\alpha)$.

Teorema: *Un subconjunto de un espacio métrico es secuencialemente compacto sí y sólo si es completo y totalmente acotado.*

Otra manera de caracterizar a la compacidad es en término de conjuntos abiertos. Decimos que un cubrimiento $\{G_\alpha\}$ de A tiene un *subcubrimiento* finito si existe una colección finita de conjuntos $\{G_{\alpha_1}, G_{\alpha_2}, \cdots, G_{\alpha_n}\}$ tal que $A \subset \cup_{i=1}^n G_{\alpha_i}$.

Definición: Un subconjunto K de un espacio métrico X es **compacto** si todo cubrimiento abierto de K tiene un subcubrimiento finito.

Ejemplos: El espacio de los números reales $\mathbb{R}$ no es compacto porque el cubrimiento abierto $\{(n-1, n+1) : n \in \mathbb{N}\}$ de $\mathbb{R}$ no tiene ningún subcubrimiento finito. El intervalo semiabierto $(0,1]$ no es compacto porque el cubrimiento $\{(1/2n, 2/n) : n \in \mathbb{N}\}$ no tiene subcubrimiento finito.

Para los espacios métricos la compacidad y la compacidad secuencial son equivalentes. **Teorema**:*Un subconjunto de un espacio métrico es compacto sí y sólo si es secuencialmente compacto.*

Definición: Un subconjunto A de un espacio métrico X es **precompacto** o **relativamente compacto** si su clausura en X es compacta. Esta definición nos dice que A es precompacto si toda sucesión en A tiene una subsucesión convergente (cuyo límite podría no pertenecer a A).

Las funciones continuas en los conjuntos compactos tienen hermosas propiedades. Sabíamos que la continuidad implica la continuidad secuencial, resulta por lo tanto que las funciones continuas preservan la compacidad. **Teorema**:*Sea $f : X \to Y$ continua en K, donde K es un espacio métrico compacto e Y es un espacio métrico cualquiera. Entonces $f(K)$ es compacto.*

10. Teorema de la contracción

Definición: Sea (X, d) un espacio métrico. Una función $T : X \to X$ es una contracción si existe una constante c con $0 \leq c < 1$ tal que

$$d(T(x), T(y)) \leq cd(x, y) \tag{4}$$

para todos los elementos $x, y \in X$

Por lo tanto, una contracción acerca los puntos del espacio métrico. En particular, para cada $x \in X$ y para cualquier $r > 0$, todos los puntos y en el entorno $B_r(x)$ son mapeados dentro de un entorno $B_s(T(x))$, con $s < r$. De la ecuación (4) se deduce que una contracción es uniformemente continua.

Si $T : X \to X$, entonces un punto $x \in X$ tal que

$$T(x) = x \tag{5}$$

es llamado un punto fijo de T. El teorema de la contracción dice que una contracción en un espacio métrico completo tiene un único punto fijo. El teorema de la contracción es uno más de un conjunto de teoremas de punto fijo. Existen también teoremas de punto fijo que tratan el caso cuando $c = 1$, y otros que tratan el caso de aplicaciones continuas arbitrarias en ciertos espacios métricos. Por ejemplo, el teorema del punto fijo de Schauder dice que una aplicación continua en un subconjunto convexo compacto de un espacio de Banach tiene un punto fijo.

En general, se necesita la condición que c sea estrictamente menor a uno para probar la unicidad y la existencia de un punto fijo. Por ejemplo, si $X = \{0, 1\}$ es el espacio métrico discreto con la métrica determinada por $d(0, 1) = 1$, entonces la aplicación T definida mediante $T(0) = 1$ y $T(1) = 0$ satisface la condición 4 con $c = 1$, pero T no tiene ningún punto fijo. Por otro lado, la aplicación identidad en cualquier espacio métrico satisface 4 con $c = 1$ y cada punto del espacio es un punto fijo.

Vale notar que 5 y sus soluciones, no dependen de la métrica d. Por lo tanto, si podemos encontrar en cualquier métrica en X tal que X sea completo y T sea una contracción en X.

Teorema de la contracción: *Si $T : X \to X$ es una contracción en un espacio métrico completo (X, d), entonces existe exactamente una solución $x \in X$ de la ecuación $T(x) = x$.*

Demostración: La prueba de este teorema es contructiva, es decir, explicitamente se contruirá una sucesión que converja al punto fijo. Sea x_0 un punto cualquiera de X. Definimos una sucesión $\{x_n\}$ en X mediante

$$x_{n+1} = T(x_n) \quad \text{para } n \geq 0.$$

Denotamos la enésima iteración de T mediante T^n, entonces $x_n = T^n(x_0)$.

En primer lugar, mostramos que $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy. Si $n \geq m \geq 1$, entonces por **??** y la desigualdad triangular, tenemos

$$d(x_n, x_m) = d(T^n(x_0), T^m(x_0)) \leq c^m d(T^{n-m}(x_0), x_0)$$

$$\leq c^m \left[d(T^{n-m}(x_0), T^{n-m-1}(x_0)) + d(T^{n-m-1}(x_0), T^{n-m-2}(x_0)) + ... + d(T(x_0), x_0) \right]$$

$$\leq c^m \left[\sum_{k=0}^{n-m-1} c^k \right] d(x_1, x_0) \leq c^m \left[\sum_{k=0}^{\infty} c^k \right] d(x_1, x_0) \leq \left(\frac{c^m}{1-c} \right) d(x_1, x_0),$$

lo que implica que $\{x_n\}$ es de Cauchy. Como X es un espacio completo $\{x_n\}$ converge a un límite $x \in X$, El hecho de que el límite x es un punto fijo de T se deduce de la continuidad de la contracción T:

$$T(x) = T(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} T(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x.$$

Finalmente, si x e y son dos puntos fijos entonces

$$0 \leq d(x, y) = d(T(x), T(y)) \leq cd(x, y).$$

Como $c < 1$, tenemos $d(x, y) = 0$ y por lo tanto $x = y$ y el punto fijo es único. ♣.

10.1. Puntos fijos en sistemas dinámicos

Un sistema dinámico describe la evolución en el tiempo del estado de un sistema. Los sistemas dinámicos surgen en modelos en muchas disciplinas diferentes, incluyendo física, química, biología y economía.

Un sistema dinámico está definido mediante un espacio de estados X, cuyos elementos describen los distintos estados en los cuáles puede estar el sistema, y una prescripción que relaciona el estado en el tiempo t, $x_t \in X$, con el estado en tiempo previo. Llamamos a un sistema dinámico continuo o discreto, dependiendo si la variable tiempo es continua o discreta. Para un sistema dinámico continuo, el tiempo t pertenece a un intervalo en $\mathbb{R}$, y la dinámica del sistema está tipicamente descripta por una ecuación diferencial ordinaria de la forma

$$\dot{x} = f(x),$$

donde el punto simboliza una derivada temporal y f es un elemento de X.

Para un sistema dinámico discreto, podemos considerar que el tiempo $t = n$ es un entero, y la dinámica está definida mediante la aplicación (o *mapa*) $T : X \to X$ que relaciona el estado x_{n+1} en el tiempo $n + 1$ con el estado x_n en el tiempo n,

$$x_{n+1} = Tx_n.$$

10.2. Ecuaciones integrales

Una ecuación integral de *Fredholm de segunda clase*, donde la incógnita es la función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, es una ecuación de la forma

$$f(x) - \int_a^b k(x, y)f(y)dy = g(x), \tag{6}$$

donde $k : [a, b] \times [a, b] \to \mathbb{R}$ y $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ son funciones dadas.

Una ecuación integral de *Fredholm de primera clase* es una ecuación de la forma

$$\int_a^b k(x, y)f(y)dy = g(x). \tag{7}$$

La ecuación integral (6) puede ser escrita como una ecuación de punto fijo $T(f) = f$, donde la aplicación T está definida mediante

$$Tf(x) = g(x) + \int_a^b k(x, y)f(y)dy.$$

Teorema: *Supongamos que $k : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función continua tal que satisface*

$$\sup_{a \le x \le b} \left\{ \int_a^b |k(x,y)| dy \right\} < 1, \tag{8}$$

y $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función continua. Existe entonces una única función continua $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ que satisface la ecuación (6).

Demostración: Vamos a probar este resultado demostrando que si se cumple (8), el operador T es una contracción en el espacio normado $C([a,b])$ con la norma uniforme $\|.\|_\infty$. Sabemos que el espacio $C([a,b])$ con esta norma es completo. Además, T es una contracción ya que para cualquieras $f_1, f_2 \in C([a,b])$, tenemos

$$\begin{array}{rcl} \|Tf_1 - Tf_2\|_\infty & = & \sup_{a \le x \le b} \left| \int_a^b k(x,y)(f_1(y) - f_2(y)) dy \right| \\ & \le & \sup_{a \le x \le b} \int_a^b |k(x,y)||f_1(y) - f_2(y)| dy \\ & \le & \|f_1 - f_2\|_\infty \sup_{a \le x \le b} \left\{ \int_a^b |k(x,y)| dy \right\} \\ & \le & c\|f_1 - f_2\|_\infty, \end{array}$$

donde

$$c = \sup_{a \le x \le b} \left\{ \int_a^b |k(x,y)| dy \right\} < 1.$$

La existencia de una única solución sigue del teorema de la contracción. ♣.

De la demostración del teorema de la contracción podemos obtener el punto fijo f como un límite,

$$f = \lim_{n \to \infty} T^n f_0, \tag{9}$$

para cualquier $f_0 \in C([a,b])$. Es interesante reinterpretar este límite como una serie. Definimos la aplicación $K : C([a,b]) \to C([a,b])$ mediante

$$Kf = \int_a^b k(x,y) f(y) dy.$$

Esta aplicación es denominada operador integrald de Fredholm, y la función k es llamada núcleo de K. La ecuación integral (6) puede ser escrita como

$$(I - K)f = g,$$

donde I es el operador identidad. La aplicación contracción T está dada por $Tf = g + Kf$, lo que implica que

$$\begin{array}{rcl} T^n f_0 & = & g + K(g + \cdots + K(g + Kf_0)) \\ & = & g + Kg + \cdots + K^n g + K^{n+1} f_0 \end{array}.$$

Usando la ecuación (9), encontramos que

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} K^n g.$$

Como $f = (I - K)^{-1}g$, podemos escribir formalmente esta ecuación como

$$(I - K)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} K^n. \tag{10}$$

Esta serie es llamada serie de Neumann. El uso de sumas parciales de esta serie para aproximar a la inversa se llama aproximación de Born. Explícitamente, tenemos

$$(I + K + K^2 + \cdots)f(x)$$
$$= f(x) + \int_a^b k(x,y)f(y)dy + \int_a^b \int_a^b k(x,y)k(y,z)f(z)dydz + \cdots$$

La serie de Neumann es similar a la serie geométrica. De hecho, la ecuación (**??**) es realmente una serie geométrica que es absolutamente convergente con respecto a determinada norma del operador cuando $\|K\| < 1$. Esto explica porqué no necesitamos ninguna imponer alguna condición sobre g, la ecuación (8) es una condición que asegura que $I - K$ es invertible, y ésta sólo depende de la función k.

11. Bibliografía

Cualquier libro de análisis funcional o real contiene los temas desarrollados aquí. En particular:

- Kolmogórov y Fomín
- Stakgold
- Griffel, discute otros teoremas de punto fijo.
- etc etc