

Teoría de la medida e integral de Lebesgue¹

1. Introducción

Una de las características más molestas de la teoría de los espacios funcionales es que uno tiene problemas con la integral de Riemann, problemas que no permiten llegar a ciertos teoremas indispensables. Queremos aclarar que no hay nada equivocado con la integral de Riemann, de hecho en física siempre nos manejamos con funciones que son integrables según Riemann y usamos el método de Riemann para calcular integrales concretas. Los problemas surgen cuando uno trata de hacer interactuar a la integral de Riemann con otras operaciones, especialmente con operaciones de límite (por ejemplo, el límite de una sucesión de funciones integrables puede no ser integrable).



Necesitamos entonces renovar la manera en que pensamos acerca de la integral. De estas notas nadie emergerá con la habilidad de poder calcular más integrales, sino, esperamos, con un mayor entendimiento del significado del signo integral. Los problemas de la integral de Riemann pueden solucionarse mediante la generalización conocida como integral de Lebesgue².

Este nuevo concepto de integral permite integrar clases generales de funciones, permite integrar en espacios más abstractos que \mathbb{R} (o \mathbb{R}^n), y más importante aún, se comporta mucho más civilizadamente en combinación con otras operaciones.

Hay un ejemplo muy simple de una función que es integrable según Lebesgue pero no lo es según Riemann, ésta es la función de Dirichlet:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ es racional} \\ 1 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

Una forma simple de ilustrar la diferencia entre la integral de Lebesgue y la de Riemann es la siguiente analogía. Supongamos que tenemos una bolsa llena de monedas y que queremos saber cuánta plata tenemos en la bolsa. Podemos contar las monedas de dos formas distintas:

- (a) Sacamos las monedas una a una y vamos sumando sus valores;
- (b) Agrupamos las monedas de la bolsa de acuerdo a sus valores, formando un grupo de monedas de 5 centavos, otro de 10 centavos, etc. Contamos cuántas monedas tenemos en cada grupo, multiplicamos por sus valores y sumamos.

La segunda forma de contar (que corresponde a la integral de Lebesgue) es mucho más eficiente que la primera (correspondiente a la integral de Riemann), pero, por supuesto, ambas formas de contar nos darán el mismo valor total. Nótese que para describir (b) tuvimos que usar un lenguaje un poco más elaborado que el usado para describir (a). Como veremos más adelante, la definición de la integral de Lebesgue también implica de hecho un poco más de conceptualización que la definición de la integral de Riemann.

El método a utilizar para introducir la integral de Lebesgue se asienta en el concepto de medida. Una medida no es más que una función que a ciertos subconjuntos A les asocia un número no negativo $\mu(A)$, llamado su medida o volumen, que da una idea de su 'tamaño'. Si consideramos

¹Notas preparadas por Luis O. Manuel

²La integral de Lebesgue fue creada por el matemático francés Henri Leon Lebesgue(1875-1941). Hasta fines del siglo diecinueve, el análisis matemático estaba limitado a las funciones continuas, en gran parte debido al método de integración de Riemann. A partir de trabajos de Emile Borel y Camille Jordan, Lebesgue desarrolló en 1901 su teoría de la medida. Un año después extendió el concepto de integral.

una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ que toma un número finito de valores, la definición de la integral de Riemann corresponde esencialmente a dividir el intervalo $[a, b]$ en subintervalos, multiplicar el valor que la función toma en cada subintervalo por su longitud y sumar:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^n f(x_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Por otro lado, para la integral de Lebesgue, determinamos primero cuál es la preimagen $E_k \subset [a, b]$ de cada valor y_k que la función asume, multiplicamos la medida de la preimagen por el valor de la función y sumamos.

$$\int_a^b f d\mu = \sum_{k=1}^m y_k \mu(E_k).$$

Está claro que estos dos métodos deben darnos el mismo valor de la integral. En pocas palabras, podemos decir que la diferencia entre ambas integrales es que para la integral de Riemann conciernen los valores que toma la función que está siendo integrada, mientras que en la integral de Lebesgue importa más el tamaño de subconjuntos en el dominio del integrando. Esta noción de medida o tamaño es la que vamos a tratar ahora.

Para poder adoptar el camino de Lebesgue, necesitamos definir una función que a cada subconjunto de \mathbb{R} le asocie un tamaño o medida $\mu(A)$. Esta función debe satisfacer ciertas propiedades que parece natural imponer. Por ejemplo, nos gustaría que

- Para un segmento $A = [a, b]$ la medida esté dada por su longitud, $\mu(A) = b - a$;
- Si A es la unión de conjuntos A_1, A_2, \dots disjuntos dos a dos, entonces $\mu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$;
- Si A es un conjunto con medida $\mu(A)$ entonces su traslación $x + A = \{x + y : y \in A\}$ deberá tener la misma medida $\mu(x + A) = \mu(A)$.

¡Desafortunadamente no existe tal función! En 1905 Vitali demostró que existen conjuntos muy extraños para los cuales no son válidas estas propiedades que parecen obvias³. Para solucionar este problema debemos modificar nuestra noción de tamaño o bien restringirnos a poder medir únicamente una colección más pequeña de subconjuntos de \mathbb{R} . La última opción es la más adecuada ya que veremos que los subconjuntos de \mathbb{R} medibles incluyen a cualquier subconjunto 'normal', que pueda ser aproximado por intervalos. Tales colecciones de subconjuntos se llaman *sigma*-álgebras y los presentaremos en la próxima sección.

2. Colecciones de subconjuntos

Definición⁴: Una colección no vacía Σ de subconjuntos de X es un **álgebra** si satisface

- i) $X \in \Sigma$,
- ii) Si $A \in \Sigma$ entonces $\bar{A} \in \Sigma$,
- iii) Si $A, B \in \Sigma$ entonces $A \cup B \in \Sigma$.

³La paradoja de Banach-Tarski es un resultado aún más asombroso: es posible cortar una arveja en una cantidad finita de piezas y reacomodar las piezas para que formen una pelota del tamaño del sol.

⁴**Notación**: Dados los conjuntos A y B , denotaremos $A - B$ al conjunto $\{x \in A : x \notin B\}$, diferencia simétrica $A \Delta B$ a $(A - B) \cup (B - A)$ y \bar{A} al complemento de A ($\bar{A} = X - A$ donde X es el conjunto universo considerado). Dada una familia de conjuntos $\{A_i\}$ decimos que $\bigcup_i A_i$ es una unión disjunta si $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$. 2^X simboliza el conjunto de todos los subconjuntos de X .

Definición: Σ es un σ -álgebra si es un álgebra cerrado respecto a las uniones numerables, es decir, si $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset X$ entonces $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in X$.

Teorema 1.1: La intersección de cualquier colección no vacía de álgebras o σ -álgebras es, respectivamente, un álgebra o un σ -álgebra.

Corolario 1.2: Dada una colección \mathcal{D} de subconjuntos de X existe un σ -álgebra minimal que contiene a \mathcal{D} , $\Sigma(\mathcal{D})$. Es minimal en el sentido que si Σ es un σ -álgebra que contiene a \mathcal{D} , entonces $\Sigma(\mathcal{D}) \subset \Sigma$.

Demostración: Simplemente proponemos $\Sigma(\mathcal{D})$ como la intersección de todos los σ -álgebras que contienen a \mathcal{D} . Esta es una intersección no vacía, ya que para todo X no vacío siempre existe el σ -álgebra 2^X que contiene a \mathcal{D} .

Decimos que $\Sigma(\mathcal{D})$ es el σ -álgebra generado por \mathcal{D} . ♣

Ahora vamos a introducir el σ -álgebra en \mathbb{R} que utilizaremos para definir la medida de Lebesgue, a cada uno de sus elementos podremos asignarle un 'tamaño' a partir de la definición natural de longitud de un intervalo.

Sea $\mathcal{O} \subset 2^{\mathbb{R}}$ la colección de los conjuntos abiertos de \mathbb{R} , queremos construir el σ -álgebra más pequeño que contenga a \mathcal{O} . De acuerdo al último corolario, para ello debemos realizar la intersección de todos los σ -álgebras que contienen a todos los subconjuntos abiertos.

Definición: Llamaremos álgebra de Borel, \mathcal{B} , al σ -álgebra generado por todos los subconjuntos abiertos de la recta real. Los elementos de \mathcal{B} serán llamados conjuntos de Borel de \mathbb{R} .

Generalmente, no es trivial dar la forma de un conjunto de Borel cualquiera. Sin embargo, algunos ejemplos simples de conjuntos de Borel son los siguientes: los intervalos abiertos acotados (a, b) , los semiabiertos $(a, b]$, los cerrados $[a, b]$, los puntos $x \in \mathbb{R}$, los intervalos no acotados cerrados $[a, \infty)$ o abiertos (a, ∞) , los racionales \mathbb{Q} , y otros más exóticos como los conjuntos de Cantor.

3. Medida

¿Cómo podemos medir el tamaño de un conjunto? La longitud es una buen camino para medir intervalos en el eje real. ¿Pero qué pasa si queremos manejarnos con conjuntos de números reales que no son intervalos, o conjuntos de números naturales o conjuntos más abstractos aún? A continuación vamos a desarrollar la teoría de la medida, válida para un universo X arbitrario.

Sea X un conjunto y Σ un σ -álgebra en X .

Definición: Una función $\mu : \Sigma \rightarrow [0, +\infty]$ se llamará medida si

- i) (Positividad) $\mu(A) \geq 0$ para todo $A \in \Sigma$ y $\mu(\emptyset) = 0$,
- ii) (σ -aditividad) Si $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es una familia disjunta de conjuntos de Σ , entonces

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i).$$

Ejemplo: La medida de Lebesgue será la que nos permita generalizar la integral de Riemann. Esta medida se define en primer lugar para los conjuntos de Borel, usando la definición natural de longitud de un intervalo. Más adelante veremos cómo extender la medida para que pueda aplicarse a otros conjuntos no borelianos.

Teorema 2.1: Una medida μ satisface las siguientes propiedades:

i) (Monotonicidad) Si $A, B \in \Sigma$ y $B \subset A$ entonces $\mu(B) \leq \mu(A)$,

ii) (Substractividad) Si $A, B \in \Sigma$, $B \subset A$ y $\mu(B) < +\infty$ entonces $\mu(A - B) = \mu(A) - \mu(B)$,

iii) (Subaditividad) Si $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \Sigma$ entonces

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i).$$

Demostración: i) $A = (A - B) \cup B$, siendo $A - B$ y B disjuntos, lo que permite escribir $\mu(A) = \mu(A - B) + \mu(B)$ por la propiedad de aditividad de μ . Como $\mu(A - B) \geq 0$, resulta $\mu(A) \geq \mu(B)$.

ii) Si $\mu(B) < +\infty$ obtenemos de i) $\mu(A) - \mu(B) = \mu(A - B)$.

iii) Probemos en primer lugar que

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \mu(E_i).$$

Notemos que los conjuntos $B_1 = E_1$, $B_k = E_k - \bigcup_{l=1}^{k-1} E_l$, $k \geq 2$, son disjuntos y $\bigcup_{i=1}^n B_i = \bigcup_{i=1}^n E_i$. Además como $B_i \subset E_i$ se cumple $\mu(B_i) \leq \mu(E_i)$. Entonces

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^n B_i\right) = \sum_{i=1}^n \mu(B_i) \leq \sum_{i=1}^n \mu(E_i).$$

Podemos repetir el mismo argumento para una familia infinita de conjuntos usando la propiedad de σ -aditividad de la medida. ♣

Teorema 2.2: (Continuidad de la medida) Sea Σ un σ -álgebra y $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \Sigma$ una sucesión monótonamente creciente, $E_n \subset E_{n+1}$. Entonces

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n).$$

Demostración: Si para algún n_0 , $\mu(E_{n_0}) = +\infty$ entonces $\mu(E_n) = +\infty$ para todo $n \geq n_0$ y $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = +\infty$.

Consideremos que $\mu(E_i) < +\infty$ para todo i . Entonces

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) &= \mu(E_1 \cup (E_2 - E_1) \cup \dots \cup (E_n - E_{n-1}) \cup \dots) = \\ &= \mu(E_1) + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=2}^n (\mu(E_i) - \mu(E_{i-1})) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n). \quad \clubsuit \end{aligned}$$

3.1. Medida exterior

Sea Σ un σ -álgebra de subconjuntos de X y μ una medida definida en Σ . Nuestro propósito es lograr usar la medida μ para la mayor cantidad de elementos de 2^X como sea posible.

Un conjunto arbitrario $A \subset X$ puede siempre cubrirse por conjuntos pertenecientes a Σ , es decir, podremos siempre encontrar $E_1, E_2, \dots \in \Sigma$ tal que $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$. La familia $\{E_i\}$ es llamada Σ -cubrimiento de A .

Definición: Para $A \subset X$ su medida exterior está definida por

$$\mu^*(A) = \inf \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$$

donde el ínfimo está tomado sobre todos los posibles Σ -cubrimientos del conjunto A , es decir, todas las colecciones $\{E_i\} \subset \Sigma$ con $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$.

Nota: la medida exterior siempre existe puesto que $\mu(E) \geq 0$ para cada $E \in \Sigma$.

Teorema 3.3: Para $A \in \Sigma$ vale $\mu^*(A) = \mu(A)$, es decir, μ^* es una extensión de μ .

Demostración: A es su propio cubrimiento, lo que implica $\mu^*(A) \leq \mu(A)$.

Por definición de ínfimo, para cualquier $\epsilon > 0$ existe un Σ -cubrimiento $\{E_i\}$ de A tal que $\sum_i \mu(E_i) < \mu^*(A) + \epsilon$. Notemos que

$$A = A \cap \left(\bigcup_i E_i \right) = \bigcup_i (A \cap E_i).$$

Usando consecuentemente la σ -aditividad y monotonicidad de μ obtenemos

$$\mu(A) \leq \sum_i \mu(A \cap E_i) \leq \sum_i \mu(E_i) < \mu^*(A) + \epsilon.$$

Como ϵ es arbitrario, concluimos que $\mu^*(A) = \mu(A)$. ♣

Teorema 3.4: (Monotonidad de la medida exterior) Si $A \subset B$ entonces $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.

Demostración: Cualquier cubrimiento de B es un cubrimiento de A . ♣

Teorema 3.5: (σ -subaditividad de la medida exterior) Para una familia $\{A_i\} \subset 2^X$, vale

$$\mu^* \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i).$$

Demostración: Si la serie en el miembro derecho diverge no hay nada para probar. Asumimos entonces que es convergente.

Por definición de medida exterior para cualquier $\epsilon > 0$ y para cualquier i existe un Σ -cubrimiento $A_i \subset \bigcup_k E_{ki}$ tal que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_{ki}) < \mu^*(A_i) + \frac{\epsilon}{2^i}.$$

Como

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subset \bigcup_{k,i=1}^{\infty} E_{ki},$$

la definición de medida exterior implica

$$\mu^* \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) \leq \sum_{k,i=1}^{\infty} \mu(E_{ki})$$

y por lo tanto

$$\mu^* \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) < \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i) + \epsilon.$$

Como esta última relación es válida para todo $\epsilon > 0$, obtenemos la propiedad de subaditividad de la medida exterior. ♣

3.2. Conjuntos medibles

Sea Σ un σ -álgebra de subconjunto de X , μ una medida definida en Σ y μ^* la medida exterior definida en la sección anterior.

Definición: Se dice que $A \subset X$ es un conjunto medible si para cualquier $E \subset X$ vale la siguiente relación:

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap \bar{A}).$$

Notas: *i)* Puesto que $E = (E \cap A) \cup (E \cap \bar{A})$, la propiedad de subaditividad de la medida exterior nos dice que la desigualdad

$$\mu^*(E) \leq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap \bar{A})$$

es válida siempre. Basta entonces demostrar la desigualdad contraria, para todo $E \subset X$, para probar si A es o no un conjunto medible.

ii) Una forma equivalente de introducir el concepto de conjuntos medibles consiste en definir la medida interior de A mediante $\mu_*(A) = \mu(I) - \mu^*(I - A)$ donde $I \in \Sigma$ satisface $I \supset A$. Entonces se dice que A es medible si sus medidas exterior e interior son iguales, $\mu^*(A) = \mu_*(A)$. Compruebe que ambas definiciones de conjuntos medibles son equivalentes.

Definición: Llamemos $\bar{\Sigma}$ a la colección de todos los conjuntos que son medibles según la definición anterior, y $\bar{\mu}$ a la restricción de la medida exterior μ^* al conjunto $\bar{\Sigma}$, es decir, $\bar{\mu} : \bar{\Sigma} \rightarrow [0, +\infty]$.

Teorema 3.6: $\bar{\Sigma}$ es un σ -álgebra que contiene a Σ y $\bar{\mu}$ es una medida en $\bar{\Sigma}$.

Demostración: Vamos a dividir la demostración en varios pasos.

1- Si $A, B \in \bar{\Sigma}$ entonces $A \cup B \in \bar{\Sigma}$.

Por definición de conjunto medible tenemos $\mu^*(E) = \mu^*(E \cap B) + \mu^*(E \cap \bar{B})$. Si usamos $E \cap A$ en lugar de E obtenemos

$$\mu^*(E \cap A) = \mu^*(E \cap A \cap B) + \mu^*(E \cap A \cap \bar{B})$$

y usando $E \cap \bar{A}$ en lugar de E ,

$$\mu^*(E \cap \bar{A}) = \mu^*(E \cap \bar{A} \cap B) + \mu^*(E \cap \bar{A} \cap \bar{B}).$$

Sumando las dos últimas expresiones:

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A \cap B) + \mu^*(E \cap A \cap \bar{B}) + \mu^*(E \cap \bar{A} \cap B) + \mu^*(E \cap \bar{A} \cap \bar{B}).$$

Sustituyendo $E \cap (A \cup B)$ por E en la última ecuación, tenemos

$$\mu^*(E \cap (A \cup B)) = \mu^*(E \cap A \cap B) + \mu^*(E \cap \bar{A} \cap B) + \mu^*(E \cap A \cap \bar{B}).$$

De las últimas dos ecuaciones arribamos al resultado buscado:

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap (A \cup B)) + \mu^*(E \cap \overline{(A \cup B)}).$$

2- Si $A \in \bar{\Sigma}$ entonces $\bar{A} \in \bar{\Sigma}$.

La definición de conjunto medible es simétrica respecto a A y \bar{A} .

Hasta ahora demostramos que $\bar{\Sigma}$ es un álgebra de conjuntos.

3- $\bar{\Sigma}$ es un σ -álgebra.

Notemos que si $A, B \in \bar{\Sigma}$ son disjuntos, entonces de la penúltima ecuación del apartado 1- se deduce

$$\mu^*(E \cap (A \cup B)) = \mu^*(E \cap \bar{A} \cap B) + \mu^*(E \cap A \cap \bar{B}) = \mu^*(E \cap B) + \mu^*(E \cap A).$$

Por inducción se puede extender el resultado anterior para una colección finita de conjuntos B_j disjuntos de $\bar{\Sigma}$:

$$\mu^* \left(E \cap \left(\bigcup_{j=1}^n B_j \right) \right) = \sum_{j=1}^n \mu^*(E \cap B_j).$$

Sea $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$, $A_j \in \bar{\Sigma}$. Luego $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$, $B_j = A_j - \bigcup_{k=1}^{j-1} A_k$ y $B_i \cap B_j = \emptyset$ ($i \neq j$). Para demostrar que la unión numerable infinita A pertenece a $\bar{\Sigma}$, es decir que $\bar{\Sigma}$ es un σ -álgebra, tenemos que probar que A es medible, y para ello basta probar que

$$\mu^*(E) \geq \mu^* \left(E \cap \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \right) + \mu^* \left(E \cap \overline{\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j} \right)$$

ya que en el teorema 2.5 habíamos visto que la medida exterior μ^* es σ -subaditiva y ello implica siempre la desigualdad opuesta a la de arriba.

$\bar{\Sigma}$ es un álgebra, entonces $\bigcup_{j=1}^n B_j \in \bar{\Sigma}$ y vale entonces

$$\mu^*(E) \geq \mu^* \left(E \cap \bigcup_{j=1}^n B_j \right) + \mu^* \left(E \cap \overline{\bigcup_{j=1}^n B_j} \right)$$

para todo $n \geq 1$.

Como $E \cap \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \right) \subset \overline{\left(\bigcup_{j=1}^n B_j \right)}$ y debido a la monotonicidad de la medida exterior y a la última desigualdad

$$\mu^*(E) \geq \sum_{j=1}^n \mu^*(E \cap B_j) + \mu^*(E \cap \bar{A}).$$

Pasando al límite obtenemos $\mu^*(E) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(E \cap B_j) + \mu^*(E \cap \bar{A})$. Debido a la σ -subaditividad de μ^*

$$\mu^*(E \cap A) = \mu^* \left(E \cap \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \right) = \mu^* \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} (E \cap B_j) \right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(E \cap B_j).$$

Comparando con la penúltima ecuación:

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap \bar{A}).$$

Por lo tanto $A \in \bar{\Sigma}$, es decir, $\bar{\Sigma}$ es un σ -álgebra.

4- $\bar{\mu} = \mu^*$ restringida a $\bar{\Sigma}$ es una medida.

Tenemos que probar únicamente la σ -aditividad. Sea $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$. De la ecuación $\mu^*(E) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(E \cap B_j) + \mu^*(E \cap \bar{A})$ obtenida en el ítem 3- obtenemos

$$\mu^* \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \right) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j).$$

La desigualdad contraria resulta del carácter σ -subaditivo de la medida exterior μ^* .

5- $\Sigma \subset \bar{\Sigma}$.

Sea $A \in \Sigma$, $E \subset X$. Necesitamos probar:

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap \bar{A}),$$

es decir, que A es medible y pertenece por lo tanto a $\bar{\Sigma}$. Si $E \in \Sigma$ la desigualdad anterior es clara ya que $E \cap A$ y $E \cap \bar{A}$ son disjuntos y ambos pertenecen a Σ , donde $\mu^* = \mu$ y por lo tanto es aditiva.

Para $E \subset X$ y para cualquier $\epsilon > 0$ existe un Σ -cubrimiento $\{E_i\}$ de E tal que

$$\mu^*(E) + \epsilon > \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i).$$

Ahora, como $E_j = (E_j \cap A) \cup (E_j \cap \bar{A})$ tenemos

$$\mu(E_j) = \mu(E_j \cap A) + \mu(E_j \cap \bar{A})$$

y además

$$E \cap A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} (E_j \cap A),$$

$$E \cap \bar{A} \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} (E_j \cap \bar{A}).$$

Por monotonicidad y σ -subaditividad

$$\mu^*(E \cap A) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j \cap A),$$

$$\mu^*(E \cap \bar{A}) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j \cap \bar{A}).$$

Sumando las dos últimas desigualdades obtenemos $\mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap \bar{A}) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j) < \mu^*(E) + \epsilon$. Como $\epsilon > 0$ es arbitrario probamos que

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap \bar{A}). \clubsuit$$

Teorema 3.7: Sea μ una medida en un σ -álgebra Σ de subconjuntos de X , μ^* la correspondiente medida exterior. Si $\mu^*(A) = 0$ para un conjunto $A \subset X$ entonces $A \in \bar{\Sigma}$ y $\bar{\mu}(A) = 0$.

Demostración: Claramente, basta probar que $A \in \bar{\Sigma}$. Vimos también que sólo es necesario demostrar que $\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap \bar{A})$. Esto último se deduce de la monotonicidad de μ^* : $\mu^*(E \cap A) \leq \mu^*(A) = 0$ y $\mu^*(E \cap \bar{A}) \leq \mu^*(E)$. \clubsuit

Definición: Una medida μ en un σ -álgebra Σ es *completa* si $B \subset A$, $A \in \Sigma$, $\mu(A) = 0$ implica que $B \in \Sigma$ y $\mu(B) = 0$.

Nota: $\bar{\mu}$ es una medida completa.

Definición: Una medida μ en un σ -álgebra Σ se llama *finita* si $\mu(X) < +\infty$. Se llama σ -finita si existe una sucesión creciente $\{F_j\} \subset \Sigma$ tal que $X = \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j$ y $\mu(F_j) < +\infty$, $\forall j$.

3.3. Medida de Lebesgue en \mathbb{R}

Medida de Lebesgue de conjuntos acotados de \mathbb{R}

Sea \mathcal{U} el álgebra de todas las uniones finitas de intervalos semiabiertos de \mathbb{R} , es decir, todos los conjuntos de la forma

$$A = \bigcup_{j=1}^k [a_j, b_j).$$

Definimos una función $\mu : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ mediante

$$\mu(A) = \sum_{j=1}^k (b_j - a_j).$$

Teorema 3.8: μ es una medida.

Demostración: Todas las propiedades incluida la aditividad (finita) son obvias. Lo único que hay que probar es la σ -aditividad.

Sea $\{A_j\} \subset \mathcal{U}$ una unión disjunta infinita tal que $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{U}$

La condición $A \in \mathcal{U}$ significa que $\bigcup A_j$ es una unión finita de intervalos semiabiertos.

Para cualquier entero n positivo $\bigcup_{i=1}^n A_i \subset A$, por lo tanto $\sum_{i=1}^n \mu(A_i) \leq \mu(A)$ y $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \mu(A_i) \leq \mu(A)$.

Sea A^ϵ un conjunto obtenido a partir de A mediante la siguiente construcción. Tome una componente conectada de A , esta será un segmento de la forma $[s, t)$. Mueva levemente hacia la izquierda su extremo derecho para obtener un segmento cerrado. Haga lo mismo con todas las componentes conectadas de A , de forma tal que $\mu(A) < \mu(A^\epsilon) + \epsilon$. Aplique un procedimiento similar a cada uno de los semi-intervalos moviendo su extremo izquierdo hacia la izquierda y obtenga intervalos abiertos, A_j^ϵ tal que $\mu(A_j^\epsilon) < \mu(A_j) + \frac{\epsilon}{2^j}$.

Por construcción, A^ϵ es un conjunto compacto y $\{A_j^\epsilon\}$ su cubrimiento abierto. Por lo tanto, existe un número entero positivo n tal que

$$A \subset \bigcup_{j=1}^n A_j^\epsilon.$$

Por lo tanto,

$$\mu(A^\epsilon) \leq \sum_{j=1}^n \mu(A_j^\epsilon).$$

Utilizando las ecuaciones anteriores encontramos

$$\mu(A) \leq \sum_{j=1}^n \mu(A_j^\epsilon) + \epsilon \leq \sum_{j=1}^n \mu(A_j) + \sum_{j=1}^n \frac{\epsilon}{2^j} + \epsilon,$$

así $\mu(A) < \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) + 2\epsilon$. ♣

Definición: Ahora podemos definir la medida exterior μ^* y obtener el espacio medible $(\bar{\mathcal{U}}, \bar{\mu})$. El resultado de esta extensión se llama la *medida de Lebesgue*. Denotaremos a la medida de Lebesgue como m y al σ -álgebra $\bar{\mathcal{U}}$ como \mathcal{M} .

Nota: Sea $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función no decreciente y continua a la izquierda. Si definimos la medida de un intervalo semi-abierto de la forma $\mu([a, b)) = F(b) - F(a)$ obtendremos la denominada medida de Lebesgue-Stieljes, m_F .

Definición: Dado un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ y $x \in \mathbb{R}$, definimos el conjunto trasladado $A(x) = A + x = \{y + x : y \in A\}$.

Lema: *Invariancia bajo traslación.*

Sea $E \in \mathcal{L}$ y $x \in \mathbb{R}$, entonces $E(x) \in \mathcal{L}$ y $\mu(E) = \mu(E(x))$.

Teorema 3.9: *Existe un subconjunto $V \subset \mathbb{R}$ para el cual no está definida $\mu(V)$, es decir, existen conjuntos no medibles según Lebesgue.*

Demostración: Definamos $\mathbb{Q}_1 = \mathbb{Q} \cap [-1, 1]$. Dados $x, y \in [0, 1]$ definamos la relación de equivalencia $x \sim y$ sí y sólo si $x - y \in \mathbb{Q}_1$. Esta relación de equivalencia divide a $[0, 1]$ en una unión disjunta $[0, 1] = \cup_{\alpha} E_{\alpha}$ de clases de equivalencia. Si $x \in E_{\alpha}$ entonces cada $y \in E_{\alpha}$ satisface $y - x \in \mathbb{Q}$. Luego, como \mathbb{Q}_1 es numerable, también lo es E_{α} . $[0, 1]$ es no numerable por lo cual la colección de subconjuntos E_{α} es no numerable.

Tomemos un elemento de cada uno de los E_{α} y formemos con todos ellos el conjunto V . Supongamos que V es medible según Lebesgue. Enumeremos los elementos de $\mathbb{Q}_1 = \{r_1, r_2, \dots\}$ y traslademos V por r_n , llamando a cada conjunto resultante $V_n = V(r_n) = \{y : y = x + r_n, x \in V\}$. Todos estos conjuntos son disjuntos. Si no fuese así, $V_n \cap V_m \neq \emptyset$, podemos tomar un $y \in V_n \cap V_m$. Entonces $y - r_n, y - r_m \in V$ pero $(y - r_n) - (y - r_m) = r_n - r_m \in \mathbb{Q}_1$ y por lo tanto $y - r_n$ e $y - r_m$ pertenecen a la misma clase de equivalencia en $[0, 1]$. Pero V contiene un solo punto de cada clase, por lo tanto $y - r_n = y - r_m$ y de aquí resulta que $V_n = V_m$.

Dado cualquier $x \in [0, 1]$, $x \in E_{\alpha}$ para algún α , entonces $x = e_{\alpha} + r_n$ para algún $r_n \in \mathbb{Q}_1$, esto es

$$x = \alpha + r_n \in V + r_n = V(r_n) = V_n.$$

Así $[0, 1] \subset \cup_{i=1}^{\infty} V_i$. Además $\cup_{i=1}^{\infty} V_i \subset [-1, 2]$. Entonces

$$3 = \mu([-1, 2]) \geq \mu(\cup_{i=1}^{\infty} V_i) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(V_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(V)$$

ya que μ es invariante frente a traslaciones. Debemos tener entonces $\mu(V) = 0$. Pero

$$1 = \mu([0, 1]) \leq \mu(\cup_{i=1}^{\infty} V_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(V_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(V).$$

Contradicción, resulta falsa nuestra suposición. Luego, V no es medible según Lebesgue.

Esta demostración también nos dice que el conjunto V no será medible en ninguna medida μ en la cual $0 < \mu([a, b]) < \infty$. ♣.

Medida de Lebesgue en \mathbb{R}

Definición: Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ es medible según Lebesgue si para cada entero positivo n el conjunto acotado $A \cap [-n, n]$ es un conjunto medible según Lebesgue. La medida de Lebesgue en \mathbb{R} es

$$m(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(A \cap [-n, n]).$$

4. Funciones medibles

Definición: Una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}^* \equiv \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ es Σ -medible sí y sólo si $f^{-1}(B) \in \Sigma$ para todo conjunto boreliano B ($f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$).

Teorema 4.1: *La función $f : X \rightarrow \mathbb{R}^*$ es Σ -medible sí y sólo si*

$$\{x : f(x) > c\} \in \Sigma$$

para todo $c \in \mathbb{R}$.

Demostración: Sea \mathcal{A} la colección de los intervalos semi-infinitos $(c, +\infty]$ para todo $c \in \mathbb{R}$. En un ejercicio anterior demostramos que $\Sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$. Usando la definición de Σ -medible encontramos

$$\begin{aligned} f^{-1}(\mathcal{B}) \subset \Sigma &\Leftrightarrow f^{-1}(\Sigma(\mathcal{A})) \subset \Sigma \Leftrightarrow \Sigma(f^{-1}(\mathcal{A})) \subset \Sigma \quad (\text{pruébelo!}) \\ &\Leftrightarrow f^{-1}(\mathcal{A}) \subset \Sigma \quad (\text{porque } \Sigma \text{ es un } \sigma\text{-algebra}) \Leftrightarrow \\ &f^{-1}((c, +\infty]) \subset \Sigma \quad \forall c \in \mathbb{R}, \quad (\text{por definicion de } \mathcal{A}) \Leftrightarrow \\ &\{x : f(x) > c\} \in \Sigma \quad \forall c \in \mathbb{R}. \quad \clubsuit \end{aligned}$$

Nota: El teorema anterior es usualmente considerado la definición de Σ -medible.

Teorema 4.2: Sean $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}^*$ Σ -medibles y $a, b \in \mathbb{R}$. Entonces:

- i) af es Σ -medible,
- ii) $\{x \in X : f(x) > g(x)\} \in \Sigma$,
- iii) $\{x \in X : f(x) = g(x)\} \in \Sigma$,
- iv) en el conjunto de x donde está definida, $af + bg$ es Σ -medible,
- v) fg es Σ -medible,
- vi) en el conjunto de x donde está definida, f/g es Σ -medible,
- vii) $\max(f, g)$ y $\min(f, g)$ son Σ -medibles,
- viii) $|f|$ es Σ -medible.

Demostración: Queda como ejercicio.

Teorema 4.3: Sea f_n una sucesión de funciones Σ -medibles.

- i) Las funciones $\sup f_n$ e $\inf f_n$ son Σ -medibles.
- ii) Las funciones $\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$ y $\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n$ ⁵ son Σ -medibles.
- iii) El conjunto de $x \in X$ para los cuáles $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ existe es un conjunto medible.
- iv) En el conjunto de x para los cuáles $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ existe la función límite es Σ -medible.

Demostración:

i) Sea $c \in \mathbb{R}$. Para cualquier sucesión de números reales $\{x_n\}$ se cumple que $\sup(x_n) = -\inf(-x_n)$ y $\sup(x_n) > c$ sí y sólo si existe i tal que $x_i > c$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \{x : \sup f_n(x) > c\} &= \{x : \text{existe } i \text{ para el cual } f_i(x) > c\} = \\ &\bigcup_{i \geq 1} \{x : f_i(x) > c\} \in \Sigma \end{aligned}$$

ya que cada f_i es Σ -medible y Σ es cerrado respecto a uniones numerables. Por lo tanto $\sup f_n$ es Σ -medible.

Para el ínfimo sabemos que $\inf f_n = -\sup(-f_n)$ es Σ -medible.

⁵Si $\{x_n\}$ es una sucesión de números reales, se define $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} [\sup\{x_k/k \leq n\}]$ y $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} [\inf\{x_k/k \leq n\}]$.

ii) Sabemos que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n = \sup_{r \geq n} (\inf_{r \geq n} f_r) \quad \text{y} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n = \inf_{r \geq n} (\sup_{r \geq n} f_r).$$

Por el item i) obtenemos el resultado.

iii) Sabemos que

$$\{x \in X : \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \text{ existe}\} = \{x \in X : \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x)\}.$$

Por lo tanto nuestro conjunto es el de puntos en el cual dos funciones Σ -medibles son iguales. Por teorema 3.3 tal conjunto pertenece a Σ .

iv) Sea $A = \{x \in X : \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \text{ existe}\}$, entonces

$$\{x \in A : \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) > c\} = \{x \in A : \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) > c\}$$

$$(\text{ya que } \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{ en } A)$$

$$= A \cap \{x \in A : \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) > c\}$$

$$(\text{ya que } \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \text{ está definido en todo } X) \in \Sigma,$$

usando los items ii) y iii). ♣

5. Funciones simples

Definición: Una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ es simple si sólo toma un número finito de valores diferentes.

Nota: Estos valores deben ser finitos. Escribiéndolos como $a_i, 1 \leq i \leq N$, y siendo $A_i = \{x \in X : f(x) = a_i\}$, podemos expresar

$$f = \sum_{i=1}^N a_i \chi_{A_i},$$

donde χ_A es la función característica de A , es decir, $\chi_A(x) = 1$ si $x \in A$ y 0 si $x \notin A$.

Lema 4.1: Las funciones simples son cerradas respecto a la suma y multiplicación.

Demostración: Sea $s = \sum_{i=1}^N a_i \chi_{A_i}$ y $t = \sum_{j=1}^M b_j \chi_{B_j}$ donde $\bigcup_{i=1}^N A_i = \bigcup_{j=1}^M B_j = X$. Definimos $C_{ij} = A_i \cap B_j$. Luego, $A_i \subset X = \bigcup_{j=1}^M B_j$ y por lo tanto $A_i = A_i \cap \left(\bigcup_{j=1}^M B_j\right) = \bigcup_{j=1}^M C_{ij}$. Similarmente, $B_j = \bigcup_{i=1}^N C_{ij}$. Como los C_{ij} son disjuntos, podemos escribir $\chi_{A_i} = \sum_{j=1}^M \chi_{C_{ij}}$ y $\chi_{B_j} = \sum_{i=1}^N \chi_{C_{ij}}$. En consecuencia,

$$s + t = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (a_i + b_j) \chi_{C_{ij}} \quad \text{y} \quad st = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M a_i b_j \chi_{C_{ij}}$$

son funciones simples. ♣

Sea Σ un σ -álgebra en X . Supongamos que para una función simple f tenemos $A_i \in \Sigma$ para todo i . Entonces

$$\{x : f(x) > c\} = \bigcup_{a_i > c} A_i \in \Sigma$$

para todo $c \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, f es Σ -medible. Por otro lado, asumamos que f es Σ -medible. Ordenemos los valores que toma f como $a_1 < a_2 < a_3 \cdots < a_N$. Dado $1 \leq j \leq N$ tomamos $a_{j-1} < c_1 < a_j < c_2 < a_{j+1}$. Entonces

$$A_j = \left(\bigcup_{a_i > c_1} A_i \right) - \left(\bigcup_{a_i > c_2} A_i \right) = \{x : f(x) > c_1\} - \{x : f(x) > c_2\} \in \Sigma.$$

Por lo tanto demostramos el siguiente lema

Lema 4.2: Si $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ es una función simple entonces f es Σ -medible sí y sólo si $A_i \in \Sigma$ para todo $1 \leq i \leq N$. ♣

Corolario 4.3: Las funciones simples Σ -medibles son cerradas respecto a la suma y la multiplicación.

Demostración: Simplemente notemos, en la demostración del lema 4.1, que $A_i, B_j \in \Sigma$ implica $C_{ij} \in \Sigma$. ♣

Teorema 4.4: Sea f una función no negativa Σ -medible. Existe entonces una sucesión de funciones simples Σ -medibles s_n tal que $s_1 \leq s_2 \leq \cdots$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = f$.

Demostración: Hagamos una partición del rango de f usando los puntos en $D_n = \{\frac{m}{2^n} : 0 \leq m \leq n2^n\}$. Tenemos $D_n \subset D_{n+1}$. Definimos $s_n(x) = \max\{p \in D_n : p \leq f(x)\}$. $D_n \subset D_{n+1}$ significa que para un dado x $\{p \in D_n : p \leq f(x)\} \subset \{p \in D_{n+1} : p \leq f(x)\}$ y en consecuencia $s_n(x) \leq s_{n+1}(x)$. Esto es válido para todo x , se cumple entonces $s_n \leq s_{n+1}$. Esto significa también que existe $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x)$ (usando la definición extendida de límite si es necesario).

Consideremos primeramente aquellos x para los cuales $f(x)$ es finito. Para todo n para los cuales $n \geq f(x)$ tenemos $s_n(x) = \frac{m}{2^n}$ para el entero m , $0 \leq m \leq n2^n$, que satisface

$$\frac{m}{2^n} \leq f(x) < \frac{m+1}{2^n}, \quad \text{es decir} \quad s_n(x) \leq f(x) < s_n(x) + \frac{1}{2^n}.$$

De arriba concluimos que $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = f(x)$.

Veamos ahora aquellos x para los cuales $f(x) = +\infty$. $s_n(x) = n$ para todo n . Por lo tanto, $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = f(x) = +\infty$.

Concluimos que para todo x se cumple $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = f$.

Finalmente

$$s_n(x) = \sum_{0 \leq m \leq n2^n} \frac{m}{2^n} \chi_{A_{m,n}}(x)$$

donde

$$A_{m,n} = \left\{ x : \frac{m}{2^n} \leq f(x) < \frac{m+1}{2^n} \right\} = \left\{ x : f(x) < \frac{m+1}{2^n} \right\} - \left\{ x : f(x) < \frac{m}{2^n} \right\}$$

para $m \leq n2^n - 1$ mientras $A_{n2^n, n} = \{x : f(x) \geq n\}$. En todos los casos, los conjuntos $A_{m,n} \in \Sigma$. Por lo tanto, s_n son funciones simples Σ -medibles. ♣

Combinando los teorema 3.3 y 4.4 vemos que una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}^+$ es Σ -medible sí y sólo si existe una sucesión creciente de funciones simples Σ -medibles que convergen a f .

Corolario 4-5: Si $f : X \rightarrow \mathbb{R}^*$ es Σ -medible entonces f es el límite de una sucesión de funciones simples Σ -medibles.

Demostración: Podemos escribir $f = f^+ - f^-$ donde $f^+ = \max(f, 0)$ y $f^- = \max(-f, 0)$ son funciones no negativas Σ -medibles. Por el teorema 4.4 encontramos sucesiones de funciones simples no negativas Σ -medibles tales que $s_n \rightarrow f^+$ y $t_n \rightarrow f^-$. En tal caso $\{s_n - t_n\}$ es la sucesión de funciones simples requerida que converge a f . ♣

Corolario 4.6: Si $f : X \rightarrow \mathbb{R}^*$ es una función Σ -medible y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua cuyo dominio contiene los valores de f entonces la función compuesta $g \circ f$ es Σ -medible.

Demostración: Por el Corolario 4.5 podemos encontrar una sucesión de funciones simples Σ -medibles $s_n \rightarrow f$. De un ejercicio anterior sabíamos que las funciones $g \circ s_n$ son simples y medibles para todo n . Luego

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} g(s_n(x)) &= g(\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x)) \quad (\text{porque } g \text{ es continua}) \\ &= g(f(x)) = (g \circ f)(x) \end{aligned}$$

para todo $x \in X$, es decir $g \circ f = \lim_{n \rightarrow \infty} g \circ s_n$. Por el teorema 3.3 $g \circ f$ resulta ser una función Σ -medible. ♣

6. Integración

6.1. Integración de funciones simples no negativas

Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida. De ahora en más a las funciones Σ -medibles las llamaremos simplemente funciones medibles.

Definición: Sea s una función simple medible no negativa, es decir

$$s = \sum_{i=1}^N a_i \chi_{A_i},$$

donde A_i son conjuntos medibles disjuntos tales que $\bigcup_{i=1}^N A_i = X$ y $a_i \geq 0$. Para cualquier $E \in \Sigma$ definimos la integral de f sobre E como

$$I_E(s) = \sum_{i=1}^N a_i \mu(A_i \cap E),$$

con la convención que si $a_i = 0$ y $\mu(A_i \cap E) = \infty$, entonces $a_i \mu(A_i \cap E) = 0$.

Teorema 5.1: Sean s y t dos funciones simples medibles no negativas, y $E, F \in \Sigma$. Entonces

- i) $I_E(cs) = cI_E(s)$ para todo $c \in \mathbb{R}$,
- ii) $I_E(s+t) = I_E(s) + I_E(t)$,
- iii) Si $s \leq t$ en E entonces $I_E(s) \leq I_E(t)$,
- iv) Si $F \subset E$ entonces $I_F(s) \leq I_E(s)$,
- v) Si $E_1 \subset E_2 \subset \dots$, y $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ entonces $\lim_{k \rightarrow \infty} I_{E_k}(s) = I_E(s)$.

Ejercicio: Demuestre el teorema anterior.

6.2. Integración de funciones medibles no negativas

Definición: Si $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ es una función medible no negativa, $E \in \Sigma$, la integral de f sobre E se define como

$$\int_E f d\mu = \sup\{I_E(s) : s \text{ es una función simple medible, } 0 \leq s \leq f\}.$$

Sea $\mathcal{I}(f, E)$ el conjunto $\{I_E(s) : s \text{ es una función simple medible, } 0 \leq s \leq f\}$, entonces la integral de f en E es igual a $\sup \mathcal{I}(f, E)$.

Nota: la integral existe para todas las funciones medibles no negativas aunque su valor podría ser infinito. Si $\int_E f d\mu = \infty$ diremos que la integral está definida, si $\int_E f d\mu < \infty$ diremos que f es integrable (con respecto a la medida μ) o sumable en E .

Proposición 5.2: Para una función simple medible no negativa t , tenemos que $\int_E t d\mu = I_E(t)$.

Demostración: Dada cualquier función medible simple s tal que $0 \leq s \leq t$ tenemos $I_E(s) \leq I_E(t)$ por teorema 5.1(iii). Por lo tanto $I_E(t)$ es una cota superior de $\mathcal{I}(t, E)$ siendo $\int_E t d\mu$ es la menor de todas las cotas superiores. Por lo tanto, $\int_E t d\mu \leq I_E(t)$.

Además, $\int_E t d\mu \geq I_E(s)$ para todas las funciones simples medibles que satisfacen la condición $0 \leq s \leq t$, y entonces es mayor que $I_E(s)$ para el caso particular $s = t$, $\int_E t d\mu \geq I_E(t)$.

De ambas desigualdades se deduce que $\int_E t d\mu = I_E(t)$. ♣

Teorema 5.3: Nota: Todas las funciones consideradas son medibles no negativas y todos los conjuntos son medibles

i) Para todo $c \geq 0$, $\int_E c f d\mu = c \int_E f d\mu$,

ii) Si $0 \leq g \leq h$ en E entonces $\int_E g d\mu \leq \int_E h d\mu$,

iii) Si $E_1 \subset E_2$, entonces $\int_{E_1} f d\mu \leq \int_{E_2} f d\mu$.

Demostración:

i) Si $c = 0$ el miembro derecho es 0 al igual que el izquierdo. Supongamos que $c > 0$.

Si $0 \leq s \leq c f$ es una función simple medible entonces también lo será $0 \leq \frac{1}{c} s \leq f$. De allí

$$\int_E f d\mu \geq I_E\left(\frac{1}{c} s\right) = \frac{1}{c} I_E(s)$$

por el teorema 5.1(i). Entonces $c \int_E f d\mu$ es una cota superior para $\mathcal{I}(c f, E)$, conjunto para el cual $\int_E c f d\mu$ es la menor de las cotas superiores. Por lo tanto $c \int_E f d\mu \geq \int_E c f d\mu$.

Si $0 \leq s \leq f$ es una función simple medible, también lo será $0 \leq c s \leq c f$ y obtenemos $\int_E c f d\mu \geq I_E(c s)$ por definición de la integral y a su vez $I_E(c s) = c I_E(s)$ por el teorema 5.1(i). Por lo tanto $\frac{1}{c} \int_E c f d\mu$ es una cota superior para $\mathcal{I}(f, E)$ para el cual $\int_E f d\mu$ es la menor de todas las cotas superiores. Se deduce $\frac{1}{c} \int_E c f d\mu \geq \int_E f d\mu$, es decir $\int_E c f d\mu \geq c \int_E f d\mu$. Combinando las dos desigualdades llegamos al resultado buscado.

ii) Sea $0 \leq s \leq g$ una función simple medible. Entonces, ya que $g \leq h$ se cumple trivialmente que $0 \leq s \leq h$ y de aquí $I_E(s) \leq \int_E h d\mu$ por definición de la integral \int_E . $\int_E h d\mu$ es una cota superior para $\mathcal{I}(g, E)$. Como en el ítem i) tenemos $\int_E h d\mu \geq \int_E g d\mu$.

iii) Sea $0 \leq s \leq f$ una función simple medible. Entonces $I_{E_1}(s) \leq I_{E_2}(s)$ por teorema 5.1(iii) y a su vez, $I_{E_2}(s) \leq \int_{E_2} f d\mu$ por definición de la integral. $\int_{E_2} f d\mu$ es entonces una cota superior para $\mathcal{I}(f, E_1)$ y resulta mayor o igual a la menor de todas las cotas superiores, es decir $\int_{E_2} f d\mu \leq \int_{E_1} f d\mu$. ♣

Lema 5.4: Asumamos que $E \in \Sigma$, $f \geq 0$ es medible y $\int_E f d\mu < \infty$. Sea $A = \{x \in E : f(x) = +\infty\}$. Entonces $A \in \Sigma$ y $\mu(A) = 0$.

Demostración: Como f es medible vale $f^{-1}(\{\infty\}) \in \Sigma$ y por lo tanto $E \cap f^{-1}(\{\infty\}) \in \Sigma$. Definamos

$$s_n(x) = \begin{cases} n & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

Como A es medible deducimos que s_n es una función simple medible. Además $s_n \leq f$ y por lo tanto

$$\mu(A) = I_E(s_n) \leq \int_E f d\mu < +\infty.$$

Lo anterior es válido para todo n lo que significa que $\mu(A) = 0$. ♣

Lema 5.5: Si f es medible y no negativa en $E \in \Sigma$ y $\mu(E) = 0$ entonces $\int_E f d\mu = 0$.

Demostración: Sea $0 \leq s \leq f$ una función simple medible. Es decir, $s = \sum_{n=1}^N a_n \chi_{A_n}$ para algunos $a_n \geq 0$, $A_n \in \Sigma$. Luego,

$$I_E(s) = \sum_{n=1}^N a_n \mu(A_n \cap E).$$

Pero μ es monótona, lo que significa que $\mu(A_n \cap E) \leq \mu(E) = 0$ para todo n y por lo tanto $I_E(s) = 0$ para todas las funciones simples s . Entonces $\mathcal{I}(f, E) = \{0\}$ y $\int_E f d\mu = \sup \mathcal{I}(f, E) = 0$.

Lema 5.6: Si $g \geq 0$ y $\int_E g d\mu = 0$ entonces $\mu\{x \in E : g(x) > 0\} = 0$.

Demostración: Sea $A = \{x \in E : g(x) > 0\}$ y $A_n = \{x \in E : g(x) > \frac{1}{n}\}$. Entonces los conjuntos $A_n = E \cap \{x \in E : g(x) > \frac{1}{n}\} \in \Sigma$ satisfacen $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ con $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Por la propiedad de continuidad de la medida tenemos $\mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$. Usando

$$s_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & x \in A_n \\ 0 & \text{para otros valores de } x, \end{cases}$$

por lo tanto $s_n \leq g$ en A_n y tenemos

$$\frac{1}{n} \mu(A_n) = I_{A_n}(s_n) \leq \int_{A_n} g d\mu \leq \int_E g d\mu = 0.$$

Entonces $\mu(A_n) = 0$ para todo n y $\mu(A) = 0$. ♣

Definición: Si una propiedad P vale para todos los puntos de $E - A$ donde $\mu(A) = 0$ diremos que P vale para casi todo punto, según la medida μ , en E y lo escribiremos P vale en c.t.p. en E . Suelen simbolizarse también como p.p. (del francés *presque partout*) ó a.e. (del inglés *almost everywhere*).

En particular, se dice que dos funciones son equivalente cuando son iguales en c.t.p.

Lema 5.7: el lema anterior puede ser reescrito si $g \geq 0$ y $\int_E g d\mu = 0$ entonces $g = 0$ en c.t.p. en E .

Teorema 5.8: Si $g, h : X \rightarrow \mathbb{R}^+$ son medibles y $g \leq h$ en c.t.p. entonces

$$\int_E g d\mu \leq \int_E h d\mu.$$

Demostración: Por hipótesis existe $D \subset E$, de medida cero, tal que para todo $x \in E - D$ tenemos $g(x) \leq h(x)$. Sea $0 \leq s \leq g$ una función simple medible, que puede escribirse como

$$s = \sum_{i=1}^N a_i \chi_{A_i}, \quad \bigcup_{i=1}^N A_i = E.$$

El problema aquí es que puede no ser cierto que $s \leq h$. Definamos

$$s^*(x) = \begin{cases} s(x) & \text{si } x \notin D \\ 0 & \text{si } x \in D \end{cases} = \sum_{i=1}^N a_i \chi_{A_i \cap \bar{D}}.$$

s^* es una función simple medible. Para $x \in E - D$ tenemos $s^*(x) = s(x) \leq g(x) \leq h(x)$, mientras para $x \in D$ tenemos $s^*(x) = 0 \leq h(x)$. O sea, $s^*(x) \leq h(x)$ para todo $x \in E$.

Notemos que $A_i = (A_i \cap \bar{D}) \cup (A_i \cap D)$ es una unión disjunta y en ese caso $\mu(A_i) = \mu(A_i \cap \bar{D}) + \mu(A_i \cap D)$. Pero $A_i \cap D \subset D$ y entonces $\mu(A_i \cap D) \leq \mu(D) = 0$. En consecuencia $\mu(A_i) = \mu(A_i \cap \bar{D})$. Luego

$$I_E(s^*) = \sum_{i=1}^N a_i \mu(A_i \cap \bar{D}) = \sum_{i=1}^N a_i \mu(A_i) = I_E(s).$$

Por lo tanto $I_E(s) = I_E(s^*) \leq \int_E h d\mu$ por definición de integral. $\int_E h d\mu$ resulta ser una cota superior para $\mathcal{I}(g, E)$ mientras $\int_E g d\mu$ es la menor de esas cotas superiores. Llegamos así al resultado buscado, $\int_E h d\mu \leq \int_E g d\mu$. ♣

Corolario 5.9: Si $g, h : X \rightarrow \mathbb{R}^+$ son medibles y $g = h$ en c.t.p. en E entonces

$$\int_E g d\mu = \int_E h d\mu.$$

Demostración: Por hipótesis existe un conjunto $D \subset E$ de medida cero tal que para todo $x \in E - D$ tenemos $g(x) = h(x)$. En particular, para esos valores tenemos $g(x) \leq h(x)$ y $h(x) \leq g(x)$. En consecuencia, $g \leq h$ en c.t.p. en E y $h \leq g$ en c.t.p. en E . El resultado entonces se deriva de la aplicación del teorema 5.8. ♣

Nota: Una función puede tener sus valores alterados en un conjunto de medida nula sin cambiar el valor de su integral. En particular, por el lema 5.4 podemos asumir que una función integrable no negativa toma siempre valores finitos.

Ejemplo: En el espacio de medida de Lebesgue $([0, 1], \mathcal{M}, m)$ la función de Dirichlet $f(x) = \chi_{\mathbb{Q}}$ es 0 en m -c.t.p. y resulta $\int_{[0,1]} f dm = 0$.

Teorema 5.10: Desigualdad de Chebychev

Sea f una función medible no negativa. Entonces, para $c > 0$ tenemos

$$\mu\{x : f(x) > c\} \leq \frac{1}{c} \int_X f d\mu.$$

Demostración: Sea $C = \{x : f(x) > c\} \in \Sigma$. Luego

$$\int_X f d\mu \geq \int_C f d\mu > \int_C c d\mu = c\mu(C). \quad \clubsuit$$

6.3. Intercambiando integrales con otras operaciones

Teorema 5.11: Convergencia monótona de Lebesgue

Sea $A \in \Sigma$ y sea $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots$ una sucesión creciente de funciones no negativas medibles definidas en A . Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n(x) d\mu = \int_A \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) d\mu.$$

Demostración:

Puesto que para $x \in A$, $\{f_n(x)\}$ es una sucesión creciente, el límite siempre existe (posiblemente ∞). Para cada $x \in A$ definimos $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$.

Del teorema 3.3(iv) se deduce que f es medible en A y existe entonces $\int_A f d\mu$. Además $f \geq f_n$ para todo n y por lo tanto

$$\int_A f d\mu \geq \int_A f_n d\mu$$

por el teorema 5.3(ii). Pero $\{f_n\}$ es una sucesión creciente, lo que implica que el límite existe y satisface

$$\int_A f d\mu \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n d\mu.$$

Ahora necesitamos encontrar la desigualdad en el otro sentido. Tomemos una función medible s , que satisface $0 \leq s \leq f$, y un número fijo c tal que $0 \leq c < 1$.

Sea $A_n = \{x \in A : f_n(x) > cs(x)\} \in \Sigma$, se cumple $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots$. Si $x \in A$ entonces $f(x) \geq s(x) > cs(x)$ y podemos encontrar un m para el cual $f_m(x) > cs(x)$, lo que significa que $x \in A_m$. Entonces $A \subset \bigcup_n A_n$. Pero $A_n \subset A$, por lo tanto $A = \bigcup_n A_n$. Luego,

$$\int_A f_n d\mu \geq \int_{A_n} f_n d\mu > \int_{A_n} cs(x) d\mu = cI_{A_n}(s)$$

y entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n d\mu \geq cI_E(s)$ por Teorema 5.1 (iv). Lo anterior es válido para cualquier $c < 1$ lo que significa que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n d\mu \geq I_E(s)$. Por lo tanto $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n d\mu$ es una cota superior para $I(f, E)$ conjunto para el cual $\int_A f d\mu$ es la menor de todas las cotas superiores. En consecuencia vale la desigualdad

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n d\mu \geq \int_A f d\mu.$$

Combinando las desigualdades llegamos al resultado que queríamos probar. ♣

Nota: El teorema de Beppo Levi es una versión modificada del teorema anterior (se pide que las integrales de f_n estén acotadas por una constante K).

Ejemplo: Enumeremos los racionales en $[0, 1]$ como r_1, r_2, \dots . Sea

$$g_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = r_i \text{ para } 1 \leq i \leq n \\ 0 & \text{para otros valores de } x \end{cases}.$$

Las funciones g_n satisfacen las condiciones del teorema de la convergencia monótona, además son integrables según Riemann con $(R) \int_0^1 g_n dx = 0$ para todo n . Sin embargo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ 0 & \text{para otros valores de } x \end{cases}$$

no es integrable según Riemann. La integración de Riemann requiere entonces condiciones extras para que $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n$ sea integrable según Riemann (exige convergencia uniforme).

Teorema 5.12: Sean $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}^+$ funciones medibles y $E \in \Sigma$. Entonces

$$\int_E (f + g) d\mu = \int_E f d\mu + \int_E g d\mu.$$

Ejercicio: Demuestre el teorema anterior.

Corolario 5.13: Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones medibles no negativas definidas en $E \in \Sigma$. Entonces

$$\int_E \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n d\mu.$$

Demostración: Sea $H_k = \sum_{n=1}^k f_n$. Por inducción basada en el teorema 5.12,

$$\int_E H_k d\mu = \sum_{n=1}^k \int_E f_n d\mu$$

para todo $k \geq 1$. Como $f_n \geq 0$ para todo n vemos que H_k es una sucesión creciente que converge a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \int_E \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\mu &= \int_E \lim_{k \rightarrow \infty} H_k d\mu = \text{(teorema 5.11)} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E H_k d\mu = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k \int_E f_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n d\mu. \quad \clubsuit \end{aligned}$$

Podemos extender el teorema de convergencia monótona a sucesiones que no sean crecientes:

Lema 5.14: Fatou: Si $\{g_n\}$ es una sucesión de funciones medibles no negativas y $E \in \Sigma$, entonces

$$\int_E \liminf_{n \rightarrow \infty} g_n d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_E g_n d\mu.$$

Demostración:

La función $\liminf_{n \rightarrow \infty} g_n$ es medible por el teorema 3.3(ii). Recordemos que $\liminf_{n \rightarrow \infty} g_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\inf_{r \geq n} g_r)$. Sea $h_n = \inf_{r \geq n} g_r$. $\{h_n\}$ es una sucesión creciente de funciones. Por lo tanto podemos aplicar el teorema de la convergencia monótona y se deduce

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E h_n d\mu = \int_E \lim_{n \rightarrow \infty} h_n d\mu = \int_E \liminf_{n \rightarrow \infty} g_n d\mu.$$

También $h_n = \inf_{r \geq n} g_r \leq g_n$ y entonces $\int_E h_n d\mu \leq \int_E g_n d\mu$. Por lo tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E h_n d\mu = \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_E h_n d\mu < \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_E g_n d\mu.$$

Combinando las desigualdad obtenemos el lema de Fatou. \clubsuit

6.4. Integración de funciones medibles

Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida. Si f es medible podemos escribir $f = f^+ - f^-$ donde $f^+ = \max(f, 0)$ y $f^- = -\min(f, 0)$ son funciones medibles no negativas. Por definición $\int_E f^+ d\mu$ y $\int_E f^- d\mu$ existen para todo conjunto $E \in \Sigma$.

Definición: Si al menos una de las integrales $\int_E f^+ d\mu$ o $\int_E f^- d\mu$ es finita, definimos la integral de f sobre E relativa a μ como

$$\int_E f d\mu = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu.$$

Si $\int_E f d\mu$ es finita diremos que f es integrable (según μ) sobre E . El conjunto de todas las funciones integrables sobre E se simbolizará $\mathcal{L}_E(\mu)$.

De la definición f es integrable sí y sólo si $\int_E f^+ d\mu$ y $\int_E f^- d\mu$ son finitas, es decir, si $|f| = f^+ + f^-$ es integrable. En consecuencia, si $f \in \mathcal{L}_E(\mu)$ entonces $|f| \in \mathcal{L}_E(\mu)$. Esta condición es más restrictiva que para el caso de la integración según Riemann. Funciones cuyas integrales son condicionalmente convergentes según Riemann no serán integrables según Lebesgue.

Teorema 5.15: Sean $f, g \in \mathcal{L}(\mu) \equiv \mathcal{L}_X(\mu)$ y $A \in \Sigma$. Entonces

- i) $f \in \mathcal{L}_A(\mu)$,
- ii) $af \in \mathcal{L}(\mu)$ y $\int_X af d\mu = a \int_X f d\mu$ para todo $a \in \mathbb{R}$,
- iii) $f + g \in \mathcal{L}(\mu)$ y $\int_X (f + g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu$,
- iv) Si $f = 0$ en c.t.p. entonces $\int_X f d\mu = 0$,
- v) Si $f \leq g$ en c.t.p. entonces $\int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu$,
- vi) Si $f = g$ en c.t.p. entonces $\int_X f d\mu = \int_X g d\mu$.

Demostración:

i) $f \in \mathcal{L}(\mu)$ implica que $\int_X f^\pm d\mu$ son finitas. Pero f^\pm son no negativas y podemos aplicar entonces el teorema 5.3(ii) y concluir que $\int_A f^\pm d\mu \leq \int_X f^\pm d\mu < \infty$. Por lo tanto, $f \in \mathcal{L}_A(\mu)$.

ii) Supongamos que $a \geq 0$. Entonces $(af)^\pm = af^\pm$ y

$$\int_X (af)^\pm d\mu = \int_X af^\pm d\mu = \text{(teorema 5.3(i)) } a \int_X f^\pm d\mu < \infty.$$

Puesto que $f \in \mathcal{L}(\mu)$ ambas integrales $\int_X f^\pm d\mu$ son finitas, de allí se deduce que ambas $\int_X (af)^\pm d\mu$ son finitas y por lo tanto $af \in \mathcal{L}(\mu)$. Además

$$\int_X af d\mu = \int_X (af)^+ d\mu - \int_X (af)^- d\mu = a \left(\int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu \right) = a \int_X f d\mu.$$

Supongamos que $a = -1$, entonces $(-f)^\pm = f^\mp$, esto significa que $-f$ es integrable y

$$\int_X (-f) d\mu = \int_X (-f)^+ d\mu - \int_X (-f)^- d\mu = \int_X f^- d\mu - \int_X f^+ d\mu = - \int_X f d\mu.$$

Supongamos ahora que $a < 0$, $af = -|a|f$ y por lo tanto

$$\int_X af d\mu = \int_X -|a|f d\mu = - \int_X |a|f d\mu = -|a| \int_X f d\mu = a \int_X f d\mu.$$

iii) Es fácil mostrar que $\max(a + b, 0) \leq \max(a, 0) + \max(b, 0)$ para cualquier par de reales a, b . De ellos se deduce que $(f + g)^\pm \leq f^\pm + g^\pm$ y

$$\int_X (f + g)^\pm d\mu \leq \int_X (f^\pm + g^\pm) d\mu = \int_X f^\pm d\mu + \int_X g^\pm d\mu < \infty,$$

ya que f y g son integrables. Entonces $f + g$ es integrable. Escribamos $(f + g)^+ + f^- + g^- = (f + g)^- + f^+ + g^+$. Ambos miembros son sumas de funciones medibles y por el teorema 5.12, las integrales de las sumas es igual a las sumas de las integrales. De ello deriva el resultado buscado.

iv) La hipótesis de $f = 0$ en c.t.p. significa que existe D de medida cero tal que para todo $x \in X - D$ tenemos $f(x) = 0$. En particular $f^\pm(x) = 0$ para tales x , y entonces $f^\pm = 0$ en c.t.p. Luego por el corolario 5.9 vemos que sus integrales son nulas y de allí $\int_X f d\mu = 0$.

v) $f \leq g$ en c.t.p. implica que $g - f \geq 0$ en c.t.p. y en tal caso $(g - f)^- = 0$ en c.t.p. Escribamos $g = f + (g - f)$

$$\int_X g d\mu = \int_X f d\mu + \int_X (g - f)^+ d\mu - \int_X (g - f)^- d\mu =$$

$$\int_X f d\mu + \int_X (g - f)^+ d\mu \geq \int_X f d\mu$$

ya que $(g - f)^+ \geq 0$.

vi) $f = g$ en c.t.p. implica que $g - f = 0$ en c.t.p. y $\int_X (g - f) d\mu = 0$ de acuerdo al item (iv). Inmediatamente resulta $\int_X g d\mu = \int_X f d\mu$. ♣

Teorema 5.16: Si $g \in \mathcal{L}(\mu)$ entonces

$$\left| \int_X g d\mu \right| \leq \int_X |g| d\mu$$

siendo válida la igualdad sí y sólo si $g \leq 0$ en c.t.p. o $g \geq 0$ en c.t.p.

Demostración: Ya hemos visto que $|g| \in \mathcal{L}(\mu)$. También

$$\begin{aligned} \left| \int_X g d\mu \right| &= \left| \int_X g^+ d\mu - \int_X g^- d\mu \right| \leq \int_X g^+ d\mu + \int_X g^- d\mu \\ &= \int_X (g^+ + g^-) d\mu = \int_X |g| d\mu. \end{aligned}$$

Sabemos que la igualdad $|a - b| \leq a + b$, $a, b \geq 0$ es válida si y sólo si $a = 0$ o $b = 0$. En el presente caso esto significa que $\int_X g^+ d\mu = 0$ o $\int_X g^- d\mu = 0$. Del lema 5.6 se deduce que $\mu\{x : g^+(x) > 0\} = 0$ o $\mu\{x : g^-(x) > 0\} = 0$, es decir, o $g \leq 0$ en c.t.p. o $g \geq 0$ en c.t.p. ♣

Corolario 5.17: Si g es medible y existe $h \in \mathcal{L}(\mu)$ con $|g| \leq h$ en c.t.p. entonces $g \in \mathcal{L}(\mu)$. De aquí se deduce que toda función acotada es integrable en un intervalo de medida finita

Demostración: Puesto que $g^\pm \leq |g|$ tenemos

$$\int_X g^\pm d\mu \leq \int_X |g| d\mu \leq \int_X h d\mu < \infty.$$

Luego, $g \in \mathcal{L}(\mu)$. ♣

Teorema 5.18: Convergencia dominada de Lebesgue

Si $\{g_n\}$ es una sucesión de funciones medibles tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = g$ en c.t.p. y si $|g_n| \leq h$ para todo $n \leq 1$, donde h es una función integrable, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X g_n d\mu = \int_X g d\mu.$$

Demostración: Por el corolario anterior $g_n \in \mathcal{L}(\mu)$ para todo n . Además $|g_n| \leq h$ implica que $|g| \leq h$ en c.t.p. y por lo tanto $g \in \mathcal{L}(\mu)$.

Consideremos la sucesión $\{h + g_n\}$ de funciones integrables no negativas. El lema de Fatou implica

$$\int_X (h + g) d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X (h + g_n) d\mu$$

y en consecuencia

$$\int_X g d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X g_n d\mu.$$

Consideremos ahora la sucesión $\{h - g_n\}$ de funciones integrables no negativas. El lema de Fatou implica que

$$\int_X (h - g) d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X (h - g_n) d\mu$$

y entonces

$$-\int_X g d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X (-g_n) d\mu$$

o

$$\int_X g d\mu \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_X g_n d\mu.$$

Luego,

$$\int_X g d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X g_n d\mu \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_X g_n d\mu \leq \int_X g d\mu$$

y as desigualdades se convierten en igualdades. En particular, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X g_n d\mu$ existe y es igual a $\int_X g d\mu$. ♣

Teorema 5.19:

Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones integrables que satisfacen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_X |f_n| d\mu < \infty.$$

Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge en c.t.p., su suma es integrable y

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\mu.$$

Demostración: Podemos aplicar el corolario 5.13 a la sucesión de funciones $|f_n|$, y obtener

$$\int_X \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X |f_n| d\mu < \infty.$$

Por el lema 5.4 encontramos que $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n| < \infty$ en c.t.p. En particular $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge en c.t.p. Para aquellos x en los cuales converge tenemos

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| \quad \text{mientras} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| \in \mathcal{L}(\mu).$$

Luego por el corolario 5.17 deducimos que $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \in \mathcal{L}(\mu)$, es decir, es integrable. Finalmente, usando la notación del teorema 5.18, tenemos $g_k = \sum_{n=1}^k f_n$ y $h = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$, y el teorema de convergencia dominada implica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k \int_X f_n d\mu = \quad (\text{por teorema 5.15(iii)})$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_X \sum_{n=1}^k f_n d\mu = \quad (\text{teorema 4.19}) \quad \int_X \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k f_n d\mu = \int_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\mu. \quad \clubsuit$$

6.5. Comparación de las integrales de Riemann y de Lebesgue

De Análisis Matemático: Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ acotada. Sea D una partición de $[a, b]$ tal que

$$D = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}.$$

Sean

$$m_i = \inf\{f(x) : x_{i-1} \leq x \leq x_i\}$$

$$M_i = \sup\{f(x) : x_{i-1} \leq x \leq x_i\}.$$

Definimos las funciones escalón (por lo tanto, funciones simples ya que asumimos que f está acotada y por lo tanto $M_i < \infty$ para todo i).

$$\alpha_D(x) = m_i \quad \text{en } [x_{i-1}, x_i] \quad \text{para todo } 1 \leq i \leq n,$$

$$\beta_D(x) = M_i \quad \text{en } [x_{i-1}, x_i] \quad \text{para todo } 1 \leq i \leq n.$$

Se cumple $\alpha_D(x) \leq f(x) \leq \beta_D(x)$ para todo $x \in [a, b]$. Usando la notación de las integrales de funciones simples tenemos

$$I(\alpha_D) = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}) \quad \text{y} \quad I(\beta_D) = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}),$$

que son normalmente conocidas como las sumas inferior y superior de Darboux-Riemann en la teoría de integración de Riemann. Obviamente tenemos $I(\alpha_D) \leq I(\beta_D)$ para cualquier partición D , y si $D' \subset D$ entonces $I(\alpha_{D'}) \leq I(\alpha_D)$ y $I(\beta_D) \leq I(\beta_{D'})$. Sean

$$\int_a^b f(x) dx = \sup_D I(\alpha_D) \quad \text{y} \quad \overline{\int_a^b} f(x) dx = \inf_D I(\beta_D).$$

Entonces f es integrable según Riemann si y sólo si

$$\int_a^b f(x) dx = \overline{\int_a^b} f(x) dx.$$

Al valor común lo simbolizamos $(R) \int_a^b f(x) dx$.

Teorema 5.20: Si f es integrable según Riemann en un intervalo finito $[a, b]$ entonces f es integrable según Lebesgue y los valores de las integrales coinciden.

Demostración: Para cada $n \geq 1$ podemos encontrar, por definición de supremo, una partición D_n^α tal que

$$0 \leq \int_a^b f(x) dx - I(\alpha_{D_n^\alpha}) < \frac{1}{n},$$

y

$$I(\alpha_{D_n^\alpha}) \rightarrow \int_a^b f(x) dx \quad \text{al tender } n \rightarrow \infty.$$

Similarmente seleccionamos una sucesión de particiones D_n^β tal que

$$I(\beta_{D_n^\beta}) \rightarrow \overline{\int_a^b} f(x) dx \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

Hagamos $D_n = D_n^\alpha \cup D_n^\beta$ resultando

$$I(\alpha_{D_n^\alpha}) \leq I(\alpha_{D_n}) \leq \int_a^b f(x)dx$$

y

$$I(\beta_{D_n^\beta}) \geq I(\beta_{D_n}) \geq \int_a^b f(x)dx.$$

Por lo tanto

$$I(\alpha_{D_n}) \rightarrow \int_a^b f(x)dx \quad \text{y} \quad I(\beta_{D_n}) \rightarrow \int_a^b f(x)dx \quad \text{cuando} \quad n \rightarrow \infty.$$

Reemplazando la sucesión D_1, D_2, \dots por $D_1, D_1 \cup D_2, D_1 \cup D_2 \cup D_3, \dots$ y renombrando podemos asumir que $D_n \subset D_{n+1}$ para todo $n \geq 1$ mientras la última ecuación sigue siendo válida. $D_n \subset D_{n+1}$ significa que

$$\alpha_{D_n}(x) \leq \alpha_{D_{n+1}}(x) \quad \text{y} \quad \beta_{D_n}(x) \geq \beta_{D_{n+1}}(x) \quad \forall n, \forall x,$$

En particular $\{\alpha_{D_n}\}$ es una sucesión creciente acotada superiormente por f . Por lo tanto $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_{D_n} = g$ existe, y satisface $g \leq f$. Similarmente $\{\beta_{D_n}\}$ es una sucesión decreciente acotada inferiormente por f . Por lo tanto $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_{D_n} = h$ existe, y satisface $h \geq f$.

Ahora $\{\alpha_{D_n} - \alpha_{D_1}\}$ es una sucesión creciente de funciones simples no negativas medibles que tiende a $g - \alpha_{D_1}$. Por lo tanto por el teorema de convergencia monótona de Lebesgue tenemos

$$(L) \int_a^b (g - \alpha_{D_1}) dm = \lim_{n \rightarrow \infty} I(\alpha_{D_n} - \alpha_{D_1}) = \int_a^b f(x)dx - I(\alpha_{D_1}).$$

Como α_{D_1} es una función simple tenemos $(L) \int_a^b \alpha_{D_1} dm = I(\alpha_{D_1})$ y entonces

$$(L) \int_a^b g dm = \int_a^b f(x)dx.$$

Similarmente, examinando $\beta_{D_1} - \beta_{D_n}$ encontramos que

$$(L) \int_a^b h dm = \int_a^b f(x)dx.$$

Por lo tanto, si f es integrable según Riemann, $(L) \int_a^b (g - h) dm = 0$. $h - g \geq 0$, esto implica que $h = g$ c.t.p. en $[a, b]$. Pero $g \leq f \leq h$ resultando $f = g$ c.t.p. en $[a, b]$. En consecuencia sus integrales según Lebesgue son iguales y coinciden a su vez con la integral según Riemann $(R) \int_a^b f(x)dx$. ♣

Nota sobre integrales impropias: Las funciones no acotadas no son integrables según Riemann, pero muchas de ellas son integrables según Lebesgue. En particular cualquier función $f(x) \geq 0$ para la cual la integral de Riemann

$$(R) \int_{a+\epsilon}^b f(x)dx$$

existe para cada $\epsilon > 0$ y tiene un límite finito I para $\epsilon \rightarrow 0$, es integrable en $[a, b]$ según Lebesgue y

$$(L) \int_{[a,b]} f(x)dm = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (R) \int_{a+\epsilon}^b f(x)dx.$$

Si una función se considera en toda la recta su integral de Riemann sólo puede existir en el sentido impropio. Si esta integral converge absolutamente, también existirá en este caso la correspondiente integral de Lebesgue teniendo el mismo valor.

Si una integral de Riemann converge condicionalmente, por ejemplo $(R) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen } x}{x} dx = \pi$ (pero $(R) \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\text{sen } x}{x} \right| dx = \infty$) la función no será integrable según Lebesgue. Esto se debe a que en la teoría de Lebesgue f es integrable sí y sólo si $|f|$ también lo es.

6.6. Reducción de integral múltiple a integrales simples

Teorema 5.21: Fubini

Sea $f(x, y)$ sumable en \mathbb{R}^2 , si fijamos el valor de una variable, la función considerada como función de la otra es, salvo posiblemente para un conjunto de valores de medida nula de la variable fija, sumable en \mathbb{R} y se tiene

$$\int \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx \right] dy = \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy \right] dx.$$

Demostración: página 359 del Kolmogorov.

Nota: Si la función $f(x, y)$ es no negativa, la existencia de una cualquiera de las tres integrales de la fórmula anterior implica la existencia de las otras dos (teorema de Tonelli).