Estudio Poliedral del Problema de Coloreo Equitativo

Daniel Severin[1] Isabel Méndez Diaz[2] Graciela Nasini[1,3]

[1] Fac. de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrim., Universidad Nacional de Rosario Argentina, {nasini, daniel}@fceia.unr.edu.ar
[2] Fac. de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires, Argentina, imendez@dc.uba.ar
[3] CONICET, Argentina

Introducción

Definiciones

Coloreo clásico

Sea $G = (V, E)$ (simple). Un k-coloring es una partición de C_1, C_2, ..., C_k de V tal que:

- $u, v \in C_j \implies uv \notin E \qquad \forall\, j = 1, \ldots, k$

Definiciones

Coloreo clásico

Sea $G = (V, E)$ (simple). Un k-coloring es una partición de C_1, C_2, …, C_k de V tal que:

- $u, v \in C_j \implies uv \notin E \qquad \forall\, j = 1, \ldots, k$

Coloreo equitativo

Un k-eqcol es un k-coloring tal que:

- $||C_i| - |C_j|| \leq 1 \qquad \forall\, i, j = 1, \ldots, k$

Definiciones

Coloreo clásico

Sea $G = (V, E)$ (simple). Un k-coloring es una partición de C_1, C_2, …, C_k de V tal que:

- $u, v \in C_j \implies uv \notin E \qquad \forall\, j = 1, \ldots, k$

Coloreo equitativo

Un k-eqcol es un k-coloring tal que:

- $||C_i| - |C_j|| \leq 1 \qquad \forall\, i, j = 1, \ldots, k$

Número cromático equitativo

$\chi_{eq}(G) = \min\{k : G \text{ admite un } k\text{-eqcol}\}$

- Hallar $\chi_{eq}(G)$ es **NP-Hard** [Furmanczyk H., Kubale M. (2005)].

Objetivos

Nuestros objetivos:

- Formular modelo entero para Problema de Coloreo Equitativo.
- Estudiar estructura poliedral.
- Desarrollar algoritmo branch-and-cut.

Objetivos

Nuestros objetivos:

- Formular modelo entero para Problema de Coloreo Equitativo.
- Estudiar estructura poliedral.
- Desarrollar algoritmo branch-and-cut.

En esta charla:

- Presentar formulación existente.
- Nueva formulación que rompe más simetrías.
- Algunos benchmarks.

Modelo entero para el Problema de Coloreo Clásico

[Mendez Diaz I. and Zabala P. (2005)]

$$x_{vj} = \begin{cases} 1 & \text{si el color } j \text{ es asignado a } v, \\ 0 & \text{si no,} \end{cases} \qquad w_j = \begin{cases} 1 & x_{vj} = 1 \text{ para algún } v, \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

Modelo entero para el Problema de Coloreo Clásico

[Mendez Diaz I. and Zabala P. (2005)]

$$x_{vj} = \begin{cases} 1 & \text{si el color } j \text{ es asignado a } v, \\ 0 & \text{si no,} \end{cases} \qquad w_j = \begin{cases} 1 & x_{vj} = 1 \text{ para algún } v, \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

$$(x, w) \; coloring \quad \leftrightarrow \quad (x, w) \; es \; binario \; y \; satisface:$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{vj} = 1, \qquad \forall \, v \in V$$

$$x_{uj} + x_{vj} \leq w_j, \qquad \forall \, uv \in E, \; j = 1, \ldots, n-1$$

$$w_{j+1} \leq w_j, \qquad \forall \, j = 1, \ldots, n-1$$

Modelo entero para el Problema de Coloreo Clásico

[Mendez Diaz I. and Zabala P. (2005)]

$$x_{vj} = \begin{cases} 1 & \text{si el color } j \text{ es asignado a } v, \\ 0 & \text{si no,} \end{cases} \qquad w_j = \begin{cases} 1 & x_{vj} = 1 \text{ para algún } v, \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

$$(x,w) \ \textit{coloring} \quad \leftrightarrow \quad (x,w) \ \textit{es binario y satisface}:$$

$$\begin{array}{ll} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_{vj} = 1, & \forall\ v \in V \\ x_{uj} + x_{vj} \le w_j, & \forall\ uv \in E,\ j = 1, \dots, n-1 \\ w_{j+1} \le w_j, & \forall\ j = 1, \dots, n-1 \\ x_{ij} \le w_j, & \forall\ i \text{ aislado},\ j = 1, \dots, n-1 \end{array}$$

Modelando la equidad

[Mendez Diaz I., Nasini G. and Severin D. (2008)]

- Tamaño de las clases de color: $|C_j| = \sum_{v \in V} x_{vj}$

Modelando la equidad

[Mendez Diaz I., Nasini G. and Severin D. (2008)]

- Tamaño de las clases de color: $|C_j| = \sum_{v \in V} x_{vj}$
- Restricción de equidad en un k-eqcol: $\lfloor n/k \rfloor \leq |C_j| \leq \lceil n/k \rceil$.

Modelando la equidad

[Mendez Diaz I., Nasini G. and Severin D. (2008)]

- Tamaño de las clases de color: $|C_j| = \sum_{v \in V} x_{vj}$
- Restricción de equidad en un k-eqcol: $\lfloor n/k \rfloor \leq |C_j| \leq \lceil n/k \rceil$.
- Si pedimos que $|C_j| \geq |C_{j+1}|$ en un k-eqcol: $|C_j| = t_k^j$, donde

$$t_k^j = \begin{cases} \lfloor n/k \rfloor + 1, & j = 1, \ldots, (n \mod k) \\ \lfloor n/k \rfloor, & j = (n \mod k) + 1, \ldots, k \end{cases}$$

Modelando la equidad

[Mendez Diaz I., Nasini G. and Severin D. (2008)]

- Tamaño de las clases de color: $|C_j| = \sum_{v \in V} x_{vj}$
- Restricción de equidad en un k-eqcol: $\lfloor n/k \rfloor \leq |C_j| \leq \lceil n/k \rceil$.
- Si pedimos que $|C_j| \geq |C_{j+1}|$ en un k-eqcol: $|C_j| = t_k^j$, donde

$$t_k^j = \begin{cases} \lfloor n/k \rfloor + 1, & j = 1, \ldots, (n \mod k) \\ \lfloor n/k \rfloor, & j = (n \mod k) + 1, \ldots, k \end{cases}$$

$$\therefore \quad \sum_{v \in V} x_{vj} = w_n + \sum_{k=j}^{n-1} t_k^j (w_k - w_{k+1}), \quad \forall\, j = 1, \ldots, n-1.$$

Modelo entero para el Problema de Coloreo Equitativo

[Mendez Diaz I., Nasini G. and Severin D. (2008)]

(x, w) *eqcol* $\leftrightarrow$ (x, w) *es binario y satisface* :

$$\sum_{j=1}^{n} x_{vj} = 1, \qquad \forall\ v \in V$$

$$x_{uj} + x_{vj} \leq w_j, \qquad \forall\ uv \in E,\ j = 1, \ldots, \lfloor n/2 \rfloor$$

$$w_{j+1} \leq w_j, \qquad \forall\ j = 1, \ldots, n-1$$

$$x_{ij} \leq w_j, \qquad \forall\ i \text{ aislado},\ j = 1, \ldots, \lfloor n/2 \rfloor$$

$$\sum_{v \in V} x_{vj} = w_n + \sum_{k=j}^{n-1} t_k^j (w_k - w_{k+1}), \qquad \forall\ j = 1, \ldots, n-1$$

Modelo entero para el Problema de Coloreo Equitativo

[Mendez Diaz I., Nasini G. and Severin D. (2008)]

$$(x, w) \ eqcol \quad \leftrightarrow \quad (x, w) \ es \ binario \ y \ satisface:$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{vj} = 1, \qquad \forall \ v \in V$$

$$x_{uj} + x_{vj} \leq w_j, \qquad \forall \ uv \in E, \ j = 1, \ldots, \lfloor n/2 \rfloor$$

$$w_{j+1} \leq w_j, \qquad \forall \ j = 1, \ldots, n-1$$

$$x_{ij} \leq w_j, \qquad \forall \ i \ aislado, \ j = 1, \ldots, \lfloor n/2 \rfloor$$

$$\sum_{v \in V} x_{vj} = w_n + \sum_{k=j}^{n-1} t_k^j (w_k - w_{k+1}), \qquad \forall \ j = 1, \ldots, n-1$$

- $\mathcal{ECP}_1 = conv \ \{ \ (x, w) : (x, w) \ eqcol \ \}$
- $\chi_{eq}(G) = min \ \{ \ w_1 + w_2 + \ldots + w_n \ : \ (x, w) \in \mathcal{ECP}_1 \ \}$

Nuevo modelo para el Problema de Coloreo Equitativo

Modelando la equidad otra vez

- Agregaremos $n - 1$ variables binarias:

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{si } |C_j| = \lfloor n/k \rfloor + 1 \text{ en un } k\text{-eqcol}, \\ 0 & \text{si } |C_j| = \lfloor n/k \rfloor \text{ en un } k\text{-eqcol}. \end{cases}$$

Modelando la equidad otra vez

- Agregaremos $n-1$ variables binarias:

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{si } |C_j| = \lfloor n/k \rfloor + 1 \text{ en un } k\text{-eqcol}, \\ 0 & \text{si } |C_j| = \lfloor n/k \rfloor \text{ en un } k\text{-eqcol}. \end{cases}$$

- Restricción de equidad en un k-eqcol: $|C_j| = \lfloor n/k \rfloor + y_j$.

Modelando la equidad otra vez

- Agregaremos $n-1$ variables binarias:

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{si } |C_j| = \lfloor n/k \rfloor + 1 \text{ en un } k\text{-eqcol}, \\ 0 & \text{si } |C_j| = \lfloor n/k \rfloor \text{ en un } k\text{-eqcol}. \end{cases}$$

- Restricción de equidad en un k-eqcol: $|C_j| = \lfloor n/k \rfloor + y_j$.

$$\sum_{v=1}^{n} x_{vj} = w_n + \sum_{k=j}^{n-1} \lfloor n/k \rfloor (w_k - w_{k+1}) + y_j, \quad \forall\, j = 1, \ldots, n-1.$$

Modelando la equidad otra vez

- Agregaremos $n-1$ variables binarias:

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{si } |C_j| = \lfloor n/k \rfloor + 1 \text{ en un } k\text{-eqcol}, \\ 0 & \text{si } |C_j| = \lfloor n/k \rfloor \text{ en un } k\text{-eqcol}. \end{cases}$$

- Restricción de equidad en un k-eqcol: $|C_j| = \lfloor n/k \rfloor + y_j$.

$$\sum_{v=1}^{n} x_{vj} = w_n + \sum_{k=j}^{n-1} \lfloor n/k \rfloor (w_k - w_{k+1}) + y_j, \quad \forall\, j = 1, \ldots, n-1.$$

- No estamos rompiendo la simetría $|C_j| \geq |C_{j+1}|$ como en el caso anterior.

Rompiendo simetrías

- Vamos a prohibir pintar v con un color j tal que $j > v$:

Rompiendo simetrías

- Vamos a prohibir pintar v con un color j tal que $j > v$:

$$x_{vj} = 0, \qquad \forall\, j = v+1, \dots, n.$$

Rompiendo simetrías

- Vamos a prohibir pintar v con un color j tal que $j > v$:

$$x_{vj} = 0, \qquad \forall\, j = v+1, \ldots, n.$$

- Esta fijación de variables no puede aplicarse al caso del modelo anterior.

  Ejemplo: $G = K_{2,3}$, $d(1) = d(2) = 3$.
  El único 2-eqcol en modelo anterior es
  $C_1 = \{3,4,5\}, C_2 = \{1,2\} \implies x_{12} \neq 0$.

Formulación alternativa

$$(x, w, y) \; eqcol \quad \leftrightarrow \quad (x, w, y) \; es \; binario \; y \; satisface:$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{vj} = 1, \qquad \forall \; v \in V$$

$$x_{uj} + x_{vj} \leq w_j, \qquad \forall \; uv \in E, \; j = 1, \ldots, n-1$$

$$w_{j+1} \leq w_j, \qquad \forall \; j = 1, \ldots, n-1$$

$$\sum_{v=1}^{n} x_{vj} = w_n + \sum_{k=j}^{n-1} \lfloor n/k \rfloor (w_k - w_{k+1}) + y_j, \forall \; j = 1, \ldots, n-1$$

$$x_{ij} \leq w_j, \qquad \forall \; i \; aislado, \; j = 1, \ldots, n-1$$

$$x_{vj} = 0, \qquad \forall \; j = v+1, \ldots, n$$

Comparando ambas formulaciones

Total de instancias: aprox. 200.

n	Dens.	% inst.		Nodos evaluados		Tiempo seg.	
		M1	*M2*	*M1*	*M2*	*M1*	*M2*
25	low	100	100	3(3)	2(2)	0(0)	0(0)
	med.	100	100	55(55)	16(16)	3(3)	0(0)
	high	100	100	1293(1293)	23(23)	27(27)	0(0)
30	low	100	100	11(11)	39(39)	1(1)	1(1)
	med.	100	100	3175(3175)	1323(1323)	317(317)	58(58)
	high	84	100	3603(3603)	244(302)	577(577)	11(15)
35	low	100	100	182(182)	8(8)	6(6)	1(1)
	med.	81	100	4381(4381)	802(1755)	696(696)	57(164)
	high	67	90	2109(2109)	1298(3116)	895(895)	131(409)

Usando algoritmo Cut & Branch de [Mendez Diaz I., Nasini G. and Severin D. (2008)], con CPLEX 10.1 en una Sun UltraSparc workstation.

Un algoritmo para resolver el Problema de Coloreo Equitativo

Estado del arte

- En [Bahiense, Frota, Maculan, Noronha, Ribeiro (2009)] se propone un algoritmo Branch & Cut para resolver el Problema de Coloreo Equitativo.

Estado del arte

- En [Bahiense, Frota, Maculan, Noronha, Ribeiro (2009)] se propone un algoritmo Branch & Cut para resolver el Problema de Coloreo Equitativo.
- Se basa en una formulación del tipo *asymmetric representatives* con restricciones de equidad.

Estado del arte

- En [Bahiense, Frota, Maculan, Noronha, Ribeiro (2009)] se propone un algoritmo Branch & Cut para resolver el Problema de Coloreo Equitativo.
- Se basa en una formulación del tipo *asymmetric representatives* con restricciones de equidad.
- Deberíamos tener alguna idea de cuán mejor/peor es nuestro approach con respecto a este.

Estado del arte

- En [Bahiense, Frota, Maculan, Noronha, Ribeiro (2009)] se propone un algoritmo Branch & Cut para resolver el Problema de Coloreo Equitativo.
- Se basa en una formulación del tipo *asymmetric representatives* con restricciones de equidad.
- Deberíamos tener alguna idea de cuán mejor/peor es nuestro approach con respecto a este.
- Vamos a mejorar el algoritmo Cut & Branch que teníamos, para poder comparar ambos approachs.

Esquema del algoritmo Branch & Cut

(1) Cota inferior inicial:

- Clique máxima: $\omega(G) \leq \chi_{eq}(G)$. Se halla clique maximal $\hat{\omega}(G)$ con heurística greedy.

Esquema del algoritmo Branch & Cut

(1) Cota inferior inicial:

- Clique máxima: $\omega(G) \leq \chi_{eq}(G)$. Se halla clique maximal $\hat{\omega}(G)$ con heurística greedy.
- $\frac{n+1}{\alpha(G-N[v])+2} \leq \chi_{eq}(G)$, $\forall v \in V$. Se halla partición por cliques $\hat{\theta}(G - N[v])$ para cada vértice v con heurística greedy.

Esquema del algoritmo Branch & Cut

(1) Cota inferior inicial:

- Clique máxima: $\omega(G) \leq \chi_{eq}(G)$. Se halla clique maximal $\hat{\omega}(G)$ con heurística greedy.
- $\frac{n+1}{\alpha(G-N[v])+2} \leq \chi_{eq}(G)$, $\forall v \in V$. Se halla partición por cliques $\hat{\theta}(G - N[v])$ para cada vértice v con heurística greedy.

(2) Cota superior inicial: heurística greedy *Naive* [Furmanczyk H., Kubale M. (2005)].

Esquema del algoritmo Branch & Cut

(1) Cota inferior inicial:

- Clique máxima: $\omega(G) \leq \chi_{eq}(G)$. Se halla clique maximal $\hat{\omega}(G)$ con heurística greedy.
- $\frac{n+1}{\alpha(G-N[v])+2} \leq \chi_{eq}(G)$, $\forall v \in V$. Se halla partición por cliques $\hat{\theta}(G - N[v])$ para cada vértice v con heurística greedy.

(2) Cota superior inicial: heurística greedy *Naive* [Furmanczyk H., Kubale M. (2005)].

(3) Orden de los vértices:

- Primeros vértices $1, \ldots, \hat{\omega}(G)$ son lo de la clique maximal.
- El resto de los vértices por órden decreciente de grado $d(v)$.

Esquema del algoritmo Branch & Cut

(4) Relajación lineal: Se utiliza desigualdades Neighborhood (n^2) en vez de desigualdades de adyancencia (n^3) [Mendez Diaz I. and Zabala P. (2008)].

Esquema del algoritmo Branch & Cut

(4) Relajación lineal: Se utiliza desigualdades Neighborhood (n^2) en vez de desigualdades de adyancencia (n^3) [Mendez Diaz I. and Zabala P. (2008)].

(5) Etapa de cutting:

- Nodo raíz: 12 rounds (max: 50 cortes x round).
- Se ejecuta una vez por nodo.

Esquema del algoritmo Branch & Cut

(4) Relajación lineal: Se utiliza desigualdades Neighborhood (n^2) en vez de desigualdades de adyancencia (n^3) [Mendez Diaz I. and Zabala P. (2008)].

(5) Etapa de cutting:

- Nodo raíz: 12 rounds (max: 50 cortes x round).
- Se ejecuta una vez por nodo.
- Por el momento, sólo cortes Clique ([Mendez Diaz I. and Zabala P. (2008)]).
- Cortes de CPLEX desactivados.

Esquema del algoritmo Branch & Cut

(4) Relajación lineal: Se utiliza desigualdades Neighborhood (n^2) en vez de desigualdades de adyancencia (n^3) [Mendez Diaz I. and Zabala P. (2008)].

(5) Etapa de cutting:

- Nodo raíz: 12 rounds (max: 50 cortes x round).
- Se ejecuta una vez por nodo.
- Por el momento, sólo cortes Clique ([Mendez Diaz I. and Zabala P. (2008)]).
- Cortes de CPLEX desactivados.

(6) Estrategia de branching y recorrido: CPLEX default.

(7) Presolver: CPLEX default.

Esquema del algoritmo Branch & Cut

(4) Relajación lineal: Se utiliza desigualdades Neighborhood (n^2) en vez de desigualdades de adyancencia (n^3) [Mendez Diaz I. and Zabala P. (2008)].

(5) Etapa de cutting:

- Nodo raíz: 12 rounds (max: 50 cortes x round).
- Se ejecuta una vez por nodo.
- Por el momento, sólo cortes Clique ([Mendez Diaz I. and Zabala P. (2008)]).
- Cortes de CPLEX desactivados.

(6) Estrategia de branching y recorrido: CPLEX default.

(7) Presolver: CPLEX default.

(8) Heurística primal:

- Basada en heurística greedy *Naive*.
- Heurísticas de CPLEX desactivadas.

Comparación de ambos modelos

Instancia	χ_{eq}	CPLEX default		B & C		[Bahiense et al. (2009)]	
		Nodos	Tiempo$^{\triangle}$	Nodos	Tiempo$^{\triangle}$	Nodos	Tiempo†
miles750	31	0	2	0	1	6	171
miles1000	42	0^*	0^*	0^*	0^*	13	267
miles1500	73	0^*	0^*	0^*	0^*	1	13
zeroin.i.1	49	0	0	0	0	1	50
zeroin.i.2	36	4	6	7	6	23	510
zeroin.i.3	36	7	7	7	7	28	491
queen6-6	7	611	8	205	13	1	1
queen7-7	7	682	28	2	4	1	0
queen8-8	9	$\geq$ 17800	$\geq$ 3600	2332	1327	27	441
myciel3	4	0	0	0	0	7	0
myciel4	5	127	0	179	0	237	5
jean	10	0^*	0^*	0^*	0^*	1	4
anna	11	0^*	0^*	0^*	0^*	2	26
david	30	0	0	0	0	1	13
games120	9	0^*	0^*	0^*	0^*	1	30
kneser5-2	3	0^*	0^*	0^*	0^*	1	0
kneser7-2	6	615	1	628	1	357	6
kneser7-3	3	0	0	4	0	4	2
kneser9-4	3	0	0	0	0	4	809
1-FullIns-3	4	0	0	0	0	34	2
2-FullIns-3	5	0	0	0	0	84	25
3-FullIns-3	6	0	0	0	0	38	85
4-FullIns-3	7	0	2	0	1	3	72
5-FullIns-3	8	0	1	0	1	5	268

(*) por heur. inicial. ($^{\triangle}$) Intel 1.6Ghz (LP: CPLEX 11). (†) AMD Athlon 1.8Ghz (LP: XPRESS 2005).

Otras instancias

Instancia	n, $\|E\|$	CPLEX default				B & C			
		LB	UP	Nodos	Tiempo†	LB	UP	Nodos	Tiempo†
myciel5	47, 236	6	6	111680	524	6	6	373998	1706
myciel6	95, 755	5	7	≥19400	–	5	7	≥13200	–
huck	74, 301	11	11	0*	0*	11	11	0*	0*
homer	561, 1628	13	13	0*	2*	13	13	0*	2*
kneser11-5	462, 1386	3	3	0	21	3	3	0	11
queen8-12	96, 1368	12	12	508	98	12	12	109	198
queen9-9	81, 1056	9	11	≥16800	–	9	11	≥2800	–
1-FullIns-4	93, 593	5	5	400	28	5	5	135	600
1-Insertions-4	67, 232	4	5	≥1000000	–	5	5	777800	1478
2-Insertions-3	37, 72	4	4	3062	1	4	4	2761	1
3-Insertions-3	56, 110	4	4	395589	313	4	4	133112	99
4-Insertions-3	79, 156	3	4	≥3000000	–	3	4	≥2000000	–
DSJC125.1	125, 736	5	6	≥26200	–	5	5	2580	2006
DSJC125.5	125, 3891	11	32	≥50	–	12	26	≥50	–
DSJC125.9	125, 6961	43	48	≥1000	–	43	49	≥50	–

(*) por heur. inicial. (†) AMD Phenom 2.2Ghz (LP: CPLEX 11). (-) superado tiempo 1 hora.

Desigualdades Válidas del Poliedro de Coloreo Equitativo

Preliminares

- **Problema**: La estructura del poliedro $\mathcal{ECP}_2$ varía según el órden de vértices que elijamos (debido a la eliminación de soluciones simétricas con $x_{vj} = 0$ para $v < j$).

Preliminares

- **Problema**: La estructura del poliedro $\mathcal{ECP}_2$ varía según el órden de vértices que elijamos (debido a la eliminación de soluciones simétricas con $x_{vj} = 0$ para $v < j$).
- Estudiaremos el siguiente poliedro:

$$\mathcal{ECP} = conv\ \Big\{(x,w,y) : (x,w,y)\ es\ binario\ y\ satisface :$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n} x_{vj} = 1, && \forall\ v \in V \\
&x_{uj} + x_{vj} \le w_j, && \forall\ uv \in E,\ j = 1,\dots,n-1 \\
&w_{j+1} \le w_j, && \forall\ j = 1,\dots,n-1 \\
&\sum_{v=1}^{n} x_{vj} = w_n + \sum_{k=j}^{n-1} \lfloor n/k \rfloor (w_k - w_{k+1}) + y_j, \forall\ j = 1,\dots,n-1 \\
&x_{ij} \le w_j, && \forall\ i\ aislado,\ j = 1,\dots,n-1\Big\}.
\end{aligned}$$

Ventajas de estudiar $\mathcal{ECP}$ en vez de $\mathcal{ECP}_2$

- La estructura de $\mathcal{ECP}$ no depende del órden de V.

Ventajas de estudiar $\mathcal{ECP}$ en vez de $\mathcal{ECP}_2$

- La estructura de $\mathcal{ECP}$ no depende del órden de V.
- Es difícil caracterizar $\dim(\mathcal{ECP}_2)$. Aun caracterizándose por completo, se acarrean sus casos a las pruebas de todas las facetas. Pero,

$$\dim(\mathcal{ECP}) = n^2 - \chi_{eq} - |S| - 1,$$

$$S = \{k \geq \chi_{eq} : \nexists\ k\text{-eqcol en } G\}.$$

Ventajas de estudiar $\mathcal{ECP}$ en vez de $\mathcal{ECP}_2$

- La estructura de $\mathcal{ECP}$ no depende del órden de V.
- Es difícil caracterizar $\dim(\mathcal{ECP}_2)$. Aun caracterizándose por completo, se acarrean sus casos a las pruebas de todas las facetas. Pero,

$$\dim(\mathcal{ECP}) = n^2 - \chi_{eq} - |S| - 1,$$

$$S = \{k \geq \chi_{eq} : \nexists \ k\text{-eqcol en } G\}.$$

- Propiedades:
  - $\mathcal{ECP}_2 \subset \mathcal{ECP} \quad \rightarrow$ Desig. vál. de $\mathcal{ECP}$ también de $\mathcal{ECP}_2$.

Ventajas de estudiar $\mathcal{ECP}$ en vez de $\mathcal{ECP}_2$

- La estructura de $\mathcal{ECP}$ no depende del órden de V.
- Es difícil caracterizar $\dim(\mathcal{ECP}_2)$. Aun caracterizándose por completo, se acarrean sus casos a las pruebas de todas las facetas. Pero,

$$\dim(\mathcal{ECP}) = n^2 - \chi_{eq} - |S| - 1,$$

$$S = \{k \geq \chi_{eq} : \nexists\ k\text{-eqcol en } G\}.$$

- Propiedades:
  - $\mathcal{ECP}_2 \subset \mathcal{ECP}$ $\longrightarrow$ Desig. vál. de $\mathcal{ECP}$ también de $\mathcal{ECP}_2$.
  - $\mathcal{ECP}_1 \subset Proy_{(x,w)}(\mathcal{ECP})$ $\longrightarrow$ idem. (primero despejar y_j).

Ventajas de estudiar $\mathcal{ECP}$ en vez de $\mathcal{ECP}_2$

- La estructura de $\mathcal{ECP}$ no depende del órden de V.
- Es difícil caracterizar $\dim(\mathcal{ECP}_2)$. Aun caracterizándose por completo, se acarrean sus casos a las pruebas de todas las facetas. Pero,

$$\dim(\mathcal{ECP}) = n^2 - \chi_{eq} - |S| - 1,$$

$$S = \{k \geq \chi_{eq} : \nexists \ k\text{-eqcol en } G\}.$$

- Propiedades:
  - $\mathcal{ECP}_2 \subset \mathcal{ECP} \quad \rightarrow$ Desig. vál. de $\mathcal{ECP}$ también de $\mathcal{ECP}_2$.
  - $\mathcal{ECP}_1 \subset Proy_{(x,w)}(\mathcal{ECP}) \quad \rightarrow$ idem. (primero despejar y_j).
  - $\mathcal{ECP} \subset \mathcal{CP} \quad \rightarrow$ idem. ($\mathcal{CP}$ = poliedro coloreo clásico).

Desigualdades válidas de $\mathcal{ECP}$

Sean $V_1, V_2, \ldots, V_n \subset V$.
Desigualdad válida genérica:

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{v \in V_j} x_{vj} \leq r_n w_n + \sum_{k=\chi_{eq}, k \notin S}^{n-1} r_k (w_k - w_{k+1}),$$

donde

$$r_k = \max \left\{ \sum_{j=1}^{k} \sum_{v \in V_j} x_{vj} : w_k = 1, w_{k+1} = 0 \right\}.$$

Desigualdades válidas de $\mathcal{ECP}$

Sean $V_1, V_2, \ldots, V_n \subset V$.
Desigualdad válida genérica:

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{v \in V_j} x_{vj} \leq r_n w_n + \sum_{k=\chi_{eq}, k \notin S}^{n-1} r_k (w_k - w_{k+1}),$$

donde

$$r_k = \max\left\{ \sum_{j=1}^{k} \sum_{v \in V_j} x_{vj} : w_k = 1, w_{k+1} = 0 \right\}.$$

(no son todas, pensar en desig. Neighborhood)

Desigualdades válidas de $\mathcal{ECP}$

Desigualdades válidas heredadas de $\mathcal{CP}$:

- **Clique**: $V_{j_0} = Q, \; V_j = \varnothing \;\; \forall \, j \neq j_0$.

$$\sum_{v \in Q} x_{vj_0} \leq w_{j_0}.$$

Desigualdades válidas de $\mathcal{ECP}$

Desigualdades válidas heredadas de $\mathcal{CP}$:

- **Clique**: $V_{j_0} = Q, \; V_j = \varnothing \;\; \forall\, j \neq j_0$.

$$\sum_{v \in Q} x_{vj_0} \leq w_{j_0}.$$

- **Block:** $V_j = \{v\} \;\; \forall\, j \geq j_0, \; V_j = \varnothing \;\; \forall\, j < j_0$.

$$\sum_{k=j_0}^{n} x_{vk} \leq w_{j_0}.$$

Desigualdades válidas de $\mathcal{ECP}$

Desigualdades válidas heredadas de $\mathcal{CP}$:

- **Clique**: $V_{j_0} = Q, \;\; V_j = \varnothing \;\; \forall\, j \neq j_0$.

$$\sum_{v \in Q} x_{vj_0} \leq w_{j_0}.$$

- **Block:** $V_j = \{v\} \;\; \forall\, j \geq j_0, \;\; V_j = \varnothing \;\; \forall\, j < j_0$.

$$\sum_{k=j_0}^{n} x_{vk} \leq w_{j_0}.$$

- **Antihole:** $V_{j_0} = A_k, \;\; V_{n-1} = V, \;\; V_j = \varnothing \;\; \forall\, j \notin j_0, n-1$.

$$\sum_{v \in A_k}^{n} x_{vj_0} + y_{n-1} \leq 2w_{j_0} - w_n.$$

Desigualdades válidas de $\mathcal{ECP}$

- $y_j \geq 0$ también se puede ver como una desigualdad válida genérica (hay que escribir desig. corresp. a $|C_j| \geq \lfloor n/k \rfloor$):

$$\sum_{v \in V} x_{vj} \geq w_n + \sum_{k=j}^{n-1} \lfloor n/k \rfloor (w_k - w_{k+1})$$

Desigualdades válidas de $\mathcal{ECP}$

- $y_j \geq 0$ también se puede ver como una desigualdad válida genérica (hay que escribir desig. corresp. a $|C_j| \geq \lfloor n/k \rfloor$):

$$\sum_{v \in V} x_{vj} \geq w_n + \sum_{k=j}^{n-1} \lfloor n/k \rfloor (w_k - w_{k+1})$$

Usamos: $V_j = \varnothing, \; V_{j'} = V \;\; \forall\, j' \neq j$.

Desigualdades válidas de $\mathcal{ECP}$

- $y_j \geq 0$ también se puede ver como una desigualdad válida genérica (hay que escribir desig. corresp. a $|C_j| \geq \lfloor n/k \rfloor$):

$$\sum_{v \in V} x_{vj} \geq w_n + \sum_{k=j}^{n-1} \lfloor n/k \rfloor (w_k - w_{k+1})$$

Usamos: $V_j = \varnothing,\ V_{j'} = V \ \ \forall\, j' \neq j$.

- Si $j < n-1$, $y_j \leq 1$ está dominada por $y_j + y_{n-1} \leq \sum_{k=j}^{n-1} (\lceil n/k \rceil - \lfloor n/k \rfloor)(w_k - w_{k+1})$ (pensar en desig. corresp. a $|C_j| \leq \lceil n/k \rceil$):

$$\sum_{v \in V} x_{vj} + y_{n-1} \leq w_n + \sum_{k=j}^{n-1} \lceil n/k \rceil (w_k - w_{k+1})$$

Desigualdades válidas de $\mathcal{ECP}$

- $y_j \geq 0$ también se puede ver como una desigualdad válida genérica (hay que escribir desig. corresp. a $|C_j| \geq \lfloor n/k \rfloor$):

$$\sum_{v \in V} x_{vj} \geq w_n + \sum_{k=j}^{n-1} \lfloor n/k \rfloor (w_k - w_{k+1})$$

Usamos: $V_j = \varnothing,\ V_{j'} = V \ \ \forall\, j' \neq j$.

- Si $j < n-1$, $y_j \leq 1$ está dominada por $y_j + y_{n-1} \leq \sum_{k=j}^{n-1} (\lceil n/k \rceil - \lfloor n/k \rfloor)(w_k - w_{k+1})$ (pensar en desig. corresp. a $|C_j| \leq \lceil n/k \rceil$):

$$\sum_{v \in V} x_{vj} + y_{n-1} \leq w_n + \sum_{k=j}^{n-1} \lceil n/k \rceil (w_k - w_{k+1})$$

Usamos: $V_j = V_{n-1} = V,\ V_{j'} = \varnothing \ \ \forall\, j' \neq j, n-1$.

Desigualdades válidas de $\mathcal{ECP}$

- $y_j \geq 0$ también se puede ver como una desigualdad válida genérica (hay que escribir desig. corresp. a $|C_j| \geq \lfloor n/k \rfloor$):

$$\sum_{v \in V} x_{vj} \geq w_n + \sum_{k=j}^{n-1} \lfloor n/k \rfloor (w_k - w_{k+1})$$

Usamos: $V_j = \varnothing,\ V_{j'} = V \quad \forall\, j' \neq j$.

- Si $j < n-1$, $y_j \leq 1$ está dominada por $y_j + y_{n-1} \leq \sum_{k=j}^{n-1} (\lceil n/k \rceil - \lfloor n/k \rfloor)(w_k - w_{k+1})$ (pensar en desig. corresp. a $|C_j| \leq \lceil n/k \rceil$):

$$\sum_{v \in V} x_{vj} + y_{n-1} \leq w_n + \sum_{k=j}^{n-1} \lceil n/k \rceil (w_k - w_{k+1})$$

Usamos: $V_j = V_{n-1} = V,\ V_{j'} = \varnothing \quad \forall\, j' \neq j, n-1$.
(se pueden usar para mejorar la relajación inicial)

Nuevas desigualdades válidas de $\mathcal{ECP}$

- Observación: $\mathcal{ECP}(G) \subset \mathcal{ECP}(I_n)$, $I_n = \text{grafo aislado } n \text{ vért.}$

Nuevas desigualdades válidas de $\mathcal{ECP}$

- Observación: $\mathcal{ECP}(G) \subset \mathcal{ECP}(I_n)$, $I_n = \text{grafo aislado } n \text{ vért.}$
- Desigualdades válidas de $\mathcal{ECP}(I_n)$:
  Sea $S \subset V$, y sea $C \subset \{1, \dots, n-2\}$, $|C| < |S|$.

Nuevas desigualdades válidas de $\mathcal{ECP}$

- Observación: $\mathcal{ECP}(G) \subset \mathcal{ECP}(I_n)$, $I_n = \text{grafo aislado } n \text{ vért.}$
- Desigualdades válidas de $\mathcal{ECP}(I_n)$:
  Sea $S \subset V$, y sea $C \subset \{1, \dots, n-2\}$, $|C| < |S|$.
  ¿Si consideramos un $V_j = S \ \forall\, j \in C,\ V'_j = \varnothing \ \forall\, j' \notin C$?

$$\sum_{j \in C} \sum_{v \in S} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \alpha(j, C, S)(w_k - w_{k+1}) + |C| w_n$$

donde $\alpha(j, C, S) =$ máxima cant. de vért. de S que se pueden colorear con colores de C en un j-eqcol.

Nuevas desigualdades válidas de $\mathcal{ECP}$

Sea D_j = colores de C disponibles en un j-eqcol:

$$D_j = C \cap \{1, \ldots, j\}$$

Nuevas desigualdades válidas de $\mathcal{ECP}$

Sea D_j = colores de C disponibles en un j-eqcol:

$$D_j = C \cap \{1, \ldots, j\}$$

En un j-eqcol hay $p = n \mod k$ clases de tamaño $\lfloor n/j \rfloor + 1$.
Entonces:

$$\alpha(j, C, S) = \begin{cases} 0, & D_j = \varnothing \\ \min\{|S|, \lfloor n/j \rfloor . |D_j| + \min\{|D_j|, p\}\}, & D_j \neq \varnothing \end{cases}$$

Nuevas desigualdades válidas de $\mathcal{ECP}$

Sea $D_j =$ colores de C disponibles en un j-eqcol:

$$D_j = C \cap \{1, \ldots, j\}$$

En un j-eqcol hay $p = n \mod k$ clases de tamaño $\lfloor n/j \rfloor + 1$. Entonces:

$$\alpha(j, C, S) = \begin{cases} 0, & D_j = \varnothing \\ \min\{|S|, \lfloor n/j \rfloor . |D_j| + \min\{|D_j|, p\}\}, & D_j \neq \varnothing \end{cases}$$

En general, la desigualdad tiene dim. alta cuando no se da el mínimo siempre por uno de los 2 términos. Para alcanzar la faceta, deben liftearse algunos términos de la forma y_j con j alto.

Trabajos futuros

- ¿Bajo qué condiciones las nuevas desigualdades válidas definen faceta en $\mathcal{ECP}(G)$? Por ej, S debe ser estable.
- Mejorar el B & C con las nuevas desig. y con otras desig. conocidas de $\mathcal{CP}$.
- Proponer estrategia de branching.

GRACIAS!