Nuevas facetas del poliedro de coloreo equitativo

Daniel Severin[1] Isabel Méndez-Díaz[2] Graciela Nasini[1,3]

[1] FCEIA, UNR, {nasini, daniel}@fceia.unr.edu.ar

[2] FCEyN, UBA, imendez@dc.uba.ar

[3] CONICET, Argentina

UMA, Univ.de Mar del Plata, 2009

Definiciones

Coloreo clásico

Sea $G = (V, E)$ (simple). Un k-coloreo es una partición de C_1, C_2, ..., C_k de V tal que:

- $u, v \in C_j \implies uv \notin E \qquad \forall\, j = 1, \ldots, k$

Coloreo equitativo

Un k-eqcol es un k-coloreo tal que:

- $||C_i| - |C_j|| \leq 1 \qquad \forall\, i, j = 1, \ldots, k$

Número cromático equitativo

$\chi_{eq}(G) = \min\{k : G \text{ admite un } k\text{-eqcol}\}$

- Hallar $\chi_{eq}(G)$ es **NP-Hard** [Kubale M. (2005)].

Definiciones

Coloreo clásico

Sea $G = (V, E)$ (simple). Un k-coloreo es una partición de C_1, C_2, ..., C_k de V tal que:

- $u, v \in C_j \implies uv \notin E \qquad \forall\, j = 1, \ldots, k$

Coloreo equitativo

Un k-eqcol es un k-coloreo tal que:

- $||C_i| - |C_j|| \leq 1 \qquad \forall\, i, j = 1, \ldots, k$

Número cromático equitativo

$\chi_{eq}(G) = \min\{k : G \text{ admite un } k\text{-eqcol}\}$

- Hallar $\chi_{eq}(G)$ es **NP-Hard** [Kubale M. (2005)].

Definiciones

Coloreo clásico

Sea $G = (V, E)$ (simple). Un k-coloreo es una partición de C_1, C_2, ..., C_k de V tal que:

- $u, v \in C_j \implies uv \notin E \qquad \forall\, j = 1, \ldots, k$

Coloreo equitativo

Un k-eqcol es un k-coloreo tal que:

- $||C_i| - |C_j|| \leq 1 \qquad \forall\, i, j = 1, \ldots, k$

Número cromático equitativo

$\chi_{eq}(G) = \min\{k : G \text{ admite un } k\text{-eqcol}\}$

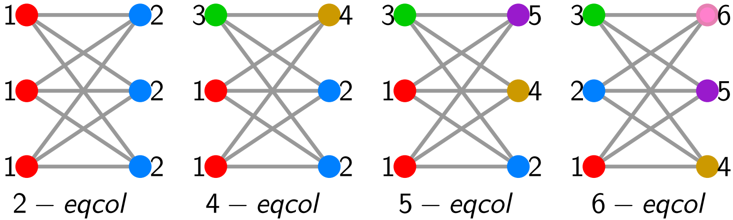
- Hallar $\chi_{eq}(G)$ es **NP-Hard** [Kubale M. (2005)].

Coloreo clásico vs. Coloreo equitativo

- Un grafo que admite un k-eqcol puede no admitir un $(k+1)$-eqcol.

Conjunto de "saltos"

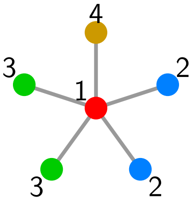
$$\mathscr{S}(G) = \{k \geq \chi_{eq}(G) : \nexists\ k\text{-eqcol en } G\}.$$



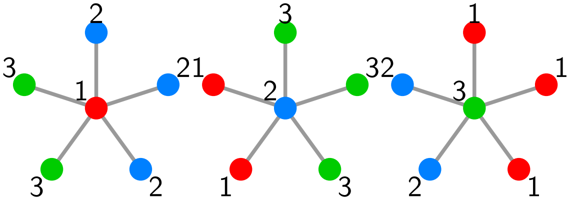
$$\mathscr{S}(K_{3,3}) = \{3\}$$

Coloreo clásico vs. Coloreo equitativo

- $G' \subset G$, pero $\chi_{eq}(G')$ puede ser mayor a $\chi_{eq}(G)$.



$\chi_{eq}(K_{1,5}) = 4$



$\chi_{eq}(K_{1,5} \cup K_{1,5} \cup K_{1,5}) = 3$

- No podemos restringirnos a grafos conexos como en el caso del coloreo clásico.

Modelo entero para el Problema de Coloreo Clásico

[Méndez-Díaz I. y Zabala P. (2005)]

$$x_{vj} = \begin{cases} 1 & \text{si el color } j \text{ es asignado a } v, \\ 0 & \text{si no,} \end{cases} \qquad w_j = \begin{cases} 1 & x_{vj} = 1 \text{ para algún } v, \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

(x, w) *coloreo* $\leftrightarrow$ (x, w) *es binario y satisface :*

$$\sum_{j=1}^{n} x_{vj} = 1, \qquad \forall\ v \in V$$

$$x_{uj} + x_{vj} \leq w_j, \qquad \forall\ uv \in E,\ j = 1, \ldots, n-1$$

$$w_{j+1} \leq w_j, \qquad \forall\ j = 1, \ldots, n-1$$

- $\chi(G) = \min\{\sum_{j=1}^{n} w_j : (x, w) \text{ coloreo}\}$

Modelo entero para el Problema de Coloreo Clásico

[Méndez-Díaz I. y Zabala P. (2005)]

$$x_{vj} = \begin{cases} 1 & \text{si el color } j \text{ es asignado a } v, \\ 0 & \text{si no,} \end{cases} \qquad w_j = \begin{cases} 1 & x_{vj} = 1 \text{ para algún } v, \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

(x, w) *coloreo* $\leftrightarrow$ (x, w) *es binario y satisface* :

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} x_{vj} = 1, && \forall\ v \in V \\ &x_{uj} + x_{vj} \leq w_j, && \forall\ uv \in E,\ j = 1, \ldots, n-1 \\ &w_{j+1} \leq w_j, && \forall\ j = 1, \ldots, n-1 \end{aligned}$$

- $\chi(G) = \min\{\sum_{j=1}^{n} w_j : (x, w) \text{ coloreo}\}$

Modelo entero para el Problema de Coloreo Clásico

[Méndez-Díaz I. y Zabala P. (2005)]

$$x_{vj} = \begin{cases} 1 & \text{si el color } j \text{ es asignado a } v, \\ 0 & \text{si no,} \end{cases} \qquad w_j = \begin{cases} 1 & x_{vj} = 1 \text{ para algún } v, \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

$$(x, w) \ \textit{coloreo} \quad \leftrightarrow \quad (x, w) \ \textit{es binario y satisface}:$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} x_{vj} &= 1, && \forall\ v \in V \\ x_{uj} + x_{vj} &\leq w_j, && \forall\ uv \in E,\ j = 1, \dots, n-1 \\ w_{j+1} &\leq w_j, && \forall\ j = 1, \dots, n-1 \end{aligned}$$

- $\chi(G) = \min\{\sum_{j=1}^{n} w_j : (x, w) \ \textit{coloreo}\}$

Modelando la equidad

- k-eqcol $\Leftrightarrow$ k-coloreo tal que $\lfloor n/k \rfloor \leq |C_j| \leq \lceil n/k \rceil \;\; \forall\, j$.
- Notar que $|C_j| = \sum_{v \in V} x_{vj}$.
- También $w_k - w_{k+1} = 1 \;\Leftrightarrow\; (x, w)$ es k-eqcol.
- En EuroAlio 2008 propusimos:

$$\sum_{v \in V} x_{vj} = w_n + \sum_{k=j}^{n-1} t_j^k (w_k - w_{k+1}), \quad \forall\, j = 1, \ldots, n-1,$$

t_j^k = tamaño clase C_j en k-eqcol

  - Elimina soluciones simétricas: $|C_j| \geq |C_{j+1}|$.
  - Difícil de estudiar.

Modelando la equidad

- k-eqcol $\Leftrightarrow$ k-coloreo tal que $\lfloor n/k \rfloor \leq |C_j| \leq \lceil n/k \rceil \quad \forall\, j$.
- Notar que $|C_j| = \sum_{v \in V} x_{vj}$.
- También $w_k - w_{k+1} = 1 \;\Leftrightarrow\; (x, w)$ es k-eqcol.
- En EuroAlio 2008 propusimos:

$$\sum_{v \in V} x_{vj} = w_n + \sum_{k=j}^{n-1} t_j^k (w_k - w_{k+1}), \quad \forall\, j = 1, \ldots, n-1,$$

$t_j^k = \text{tamaño clase } C_j \text{ en } k\text{-eqcol}$

  - Elimina soluciones simétricas: $|C_j| \geq |C_{j+1}|$.
  - Difícil de estudiar.

Modelando la equidad

- k-eqcol $\Leftrightarrow$ k-coloreo tal que $\lfloor n/k \rfloor \leq |C_j| \leq \lceil n/k \rceil \ \ \forall\, j$.
- Notar que $|C_j| = \sum_{v \in V} x_{vj}$.
- También $w_k - w_{k+1} = 1 \ \Leftrightarrow \ (x, w)$ es k-eqcol.
- En EuroAlio 2008 propusimos:

$$\sum_{v \in V} x_{vj} = w_n + \sum_{k=j}^{n-1} t_j^k (w_k - w_{k+1}), \quad \forall\, j = 1, \ldots, n-1,$$

$t_j^k = \text{tamaño clase } C_j \text{ en } k\text{-eqcol}$

- Elimina soluciones simétricas: $|C_j| \geq |C_{j+1}|$.
- Difícil de estudiar.

Modelando la equidad

- k-eqcol $\Leftrightarrow$ k-coloreo tal que $\lfloor n/k \rfloor \leq |C_j| \leq \lceil n/k \rceil \;\; \forall\, j$.
- Notar que $|C_j| = \sum_{v \in V} x_{vj}$.
- También $w_k - w_{k+1} = 1 \;\Leftrightarrow\; (x, w)$ es k-eqcol.
- En EuroAlio 2008 propusimos:

$$\sum_{v \in V} x_{vj} = w_n + \sum_{k=j}^{n-1} t_j^k (w_k - w_{k+1}), \quad \forall\, j = 1, \ldots, n-1,$$

$t_j^k = \text{tamaño clase } C_j \text{ en } k\text{-eqcol}$

  - Elimina soluciones simétricas: $|C_j| \geq |C_{j+1}|$.
  - Difícil de estudiar.

Modelando la equidad

- k-eqcol $\Leftrightarrow$ k-coloreo tal que $\lfloor n/k \rfloor \leq |C_j| \leq \lceil n/k \rceil \quad \forall\, j$.
- Notar que $|C_j| = \sum_{v \in V} x_{vj}$.
- También $w_k - w_{k+1} = 1 \;\Leftrightarrow\; (x, w)$ es k-eqcol.
- En este trabajo proponemos:

$$\sum_{v \in V} x_{vj} \geq w_n + \sum_{k=j}^{n-1} \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor (w_k - w_{k+1}), \quad \forall\, j = 1, \ldots, n-1,$$

$$\sum_{v \in V} x_{vj} \leq w_n + \sum_{k=j}^{n-1} \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil (w_k - w_{k+1}), \quad \forall\, j = 1, \ldots, n-1.$$

- Resultados útiles para poliedro de EuroAlio 2008.

Modelando la equidad

- k-eqcol $\Leftrightarrow$ k-coloreo tal que $\lfloor n/k \rfloor \leq |C_j| \leq \lceil n/k \rceil \;\; \forall\, j$.
- Notar que $|C_j| = \sum_{v \in V} x_{vj}$.
- También $w_k - w_{k+1} = 1 \;\Leftrightarrow\; (x, w)$ es k-eqcol.
- En este trabajo proponemos:

$$\sum_{v \in V} x_{vj} \geq w_n + \sum_{k=j}^{n-1} \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor (w_k - w_{k+1}), \quad \forall\, j = 1, \ldots, n-1,$$

$$\sum_{v \in V} x_{vj} \leq w_n + \sum_{k=j}^{n-1} \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil (w_k - w_{k+1}), \quad \forall\, j = 1, \ldots, n-1.$$

  - Resultados útiles para poliedro de EuroAlio 2008.

Formulación para el Problema de Coloreo Equitativo

(x, w) *eqcol* $\leftrightarrow$ (x, w) *es binario y satisface* :

$$\sum_{j=1}^{n} x_{vj} = 1, \qquad \forall\ v \in V$$

$$x_{uj} + x_{vj} \leq w_j, \qquad \forall\ uv \in E,\ j = 1, \ldots, n-1$$

$$w_{j+1} \leq w_j, \qquad \forall\ j = 1, \ldots, n-1$$

$$\sum_{v \in V} x_{vj} \geq w_n + \sum_{k=j}^{n-1} \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor (w_k - w_{k+1}), \qquad \forall\ j = 1, \ldots, n-1$$

$$\sum_{v \in V} x_{vj} \leq w_n + \sum_{k=j}^{n-1} \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil (w_k - w_{k+1}), \qquad \forall\ j = 1, \ldots, n-1$$

$$x_{ij} \leq w_j, \qquad \forall\ i \text{ aislado},\ j = 1, \ldots, n-1$$

- $\chi_{eq}(G) = \min\{\sum_{j=1}^{n} w_j : (x, w)\ eqcol\}$

Formulación para el Problema de Coloreo Equitativo

(x, w) *eqcol* $\quad\leftrightarrow\quad$ (x, w) *es binario y satisface* :

$$\sum_{j=1}^{n} x_{vj} = 1, \qquad \forall\ v \in V$$

$$x_{uj} + x_{vj} \leq w_j, \qquad \forall\ uv \in E,\ j = 1, \ldots, n-1$$

$$w_{j+1} \leq w_j, \qquad \forall\ j = 1, \ldots, n-1$$

$$\sum_{v \in V} x_{vj} \geq w_n + \sum_{k=j}^{n-1} \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor (w_k - w_{k+1}), \qquad \forall\ j = 1, \ldots, n-1$$

$$\sum_{v \in V} x_{vj} \leq w_n + \sum_{k=j}^{n-1} \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil (w_k - w_{k+1}), \qquad \forall\ j = 1, \ldots, n-1$$

$$x_{ij} \leq w_j, \qquad \forall\ i \text{ aislado},\ j = 1, \ldots, n-1$$

- $\chi_{eq}(G) = \min\{\sum_{j=1}^{n} w_j : (x, w)\ eqcol\}$

Formulación para el Problema de Coloreo Equitativo

(x, w) *eqcol* $\leftrightarrow$ (x, w) *es binario y satisface* :

$$\sum_{j=1}^{n} x_{vj} = 1, \qquad \forall\ v \in V$$

$$x_{uj} + x_{vj} \leq w_j, \qquad \forall\ uv \in E,\ j = 1, \ldots, n-1$$

$$w_{j+1} \leq w_j, \qquad \forall\ j = 1, \ldots, n-1$$

$$\sum_{v \in V} x_{vj} \geq w_n + \sum_{k=j}^{n-1} \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor (w_k - w_{k+1}), \qquad \forall\ j = 1, \ldots, n-1$$

$$\sum_{v \in V} x_{vj} \leq w_n + \sum_{k=j}^{n-1} \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil (w_k - w_{k+1}), \qquad \forall\ j = 1, \ldots, n-1$$

$$x_{ij} \leq w_j, \qquad \forall\ i \text{ aislado},\ j = 1, \ldots, n-1$$

- $\chi_{eq}(G) = \min\{\sum_{j=1}^{n} w_j : (x, w) \text{ } eqcol\}$

Aspectos poliedrales del modelo

- $\mathcal{ECP} = conv\{(x,w) \ : \ (x,w) \ eqcol\}$.
- $\mathcal{CP} = conv\{(x,w) \ : \ (x,w) \ coloreo\}$.

$$\mathcal{ECP} \subset \mathcal{CP}$$

$\therefore$ las desig. válidas de $\mathcal{CP}$ son desig. válidas de $\mathcal{ECP}$.

Objetivo: Encontrar familias de desigualdades válidas para $\mathcal{ECP}$ que puedan ser utilizadas en un B&C.

1. Estudiar desig. que definen facetas para $\mathcal{CP}$ en el contexto de $\mathcal{ECP}$.
2. Buscar desig. válidas para $\mathcal{ECP}$, no válidas para $\mathcal{CP}$ (asociadas a la equidad).

Aspectos poliedrales del modelo

- $\mathcal{ECP} = conv\{(x,w) \ : \ (x,w) \ eqcol\}$.
- $\mathcal{CP} = conv\{(x,w) \ : \ (x,w) \ coloreo\}$.

$$\mathcal{ECP} \subset \mathcal{CP}$$

$\therefore$ las desig. válidas de $\mathcal{CP}$ son desig. válidas de $\mathcal{ECP}$.

Objetivo: Encontrar familias de desigualdades válidas para $\mathcal{ECP}$ que puedan ser utilizadas en un B&C.

1. Estudiar desig. que definen facetas para $\mathcal{CP}$ en el contexto de $\mathcal{ECP}$.
2. Buscar desig. válidas para $\mathcal{ECP}$, no válidas para $\mathcal{CP}$ (asociadas a la equidad).

Aspectos poliedrales del modelo

- $\mathcal{ECP} = conv\{(x,w) \ : \ (x,w) \ eqcol\}$.
- $\mathcal{CP} = conv\{(x,w) \ : \ (x,w) \ coloreo\}$.

$$\mathcal{ECP} \subset \mathcal{CP}$$

$\therefore$ las desig. válidas de $\mathcal{CP}$ son desig. válidas de $\mathcal{ECP}$.

Objetivo: Encontrar familias de desigualdades válidas para $\mathcal{ECP}$ que puedan ser utilizadas en un B&C.

1. Estudiar desig. que definen facetas para $\mathcal{CP}$ en el contexto de $\mathcal{ECP}$.
2. Buscar desig. válidas para $\mathcal{ECP}$, no válidas para $\mathcal{CP}$ (asociadas a la equidad).

Aspectos poliedrales del modelo

- $\mathcal{ECP} = conv\{(x, w) \ : \ (x, w) \ eqcol\}$.
- $\mathcal{CP} = conv\{(x, w) \ : \ (x, w) \ coloreo\}$.

$$\mathcal{ECP} \subset \mathcal{CP}$$

$\therefore$ las desig. válidas de $\mathcal{CP}$ son desig. válidas de $\mathcal{ECP}$.

Objetivo: Encontrar familias de desigualdades válidas para $\mathcal{ECP}$ que puedan ser utilizadas en un B&C.

1. Estudiar desig. que definen facetas para $\mathcal{CP}$ en el contexto de $\mathcal{ECP}$.
2. Buscar desig. válidas para $\mathcal{ECP}$, no válidas para $\mathcal{CP}$ (asociadas a la equidad).

Aspectos poliedrales del modelo

- $\mathcal{ECP} = conv\{(x, w) \ : \ (x, w) \ eqcol\}$.
- $\mathcal{CP} = conv\{(x, w) \ : \ (x, w) \ coloreo\}$.

$$\mathcal{ECP} \subset \mathcal{CP}$$

$\therefore$ las desig. válidas de $\mathcal{CP}$ son desig. válidas de $\mathcal{ECP}$.

Objetivo: Encontrar familias de desigualdades válidas para $\mathcal{ECP}$ que puedan ser utilizadas en un B&C.

1. Estudiar desig. que definen facetas para $\mathcal{CP}$ en el contexto de $\mathcal{ECP}$.
2. Buscar desig. válidas para $\mathcal{ECP}$, no válidas para $\mathcal{CP}$ (asociadas a la equidad).

Aspectos poliedrales del modelo

- $\mathcal{ECP} = conv\{(x, w) \ : \ (x, w) \ eqcol\}$.
- $\mathcal{CP} = conv\{(x, w) \ : \ (x, w) \ coloreo\}$.

$$\mathcal{ECP} \subset \mathcal{CP}$$

$\therefore$ las desig. válidas de $\mathcal{CP}$ son desig. válidas de $\mathcal{ECP}$.

Objetivo: Encontrar familias de desigualdades válidas para $\mathcal{ECP}$ que puedan ser utilizadas en un B&C.

1. Estudiar desig. que definen facetas para $\mathcal{CP}$ en el contexto de $\mathcal{ECP}$.
2. Buscar desig. válidas para $\mathcal{ECP}$, no válidas para $\mathcal{CP}$ (asociadas a la equidad).

Desigualdades válidas genéricas

- Cualquier faceta (salvo $w_{j+1} \leq w_j$) de $\mathcal{CP}$ o $\mathcal{ECP}$ puede ser definida con una desigualdad de la forma

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{v \in V} a_{vj} x_{vj} \leq r_n w_n + \sum_{k=1}^{n-1} r_k (w_k - w_{k+1}),$$

donde $a_{vj} \in \mathbb{Z}_+$ y

$$r_k^{\mathcal{CP}} = \begin{cases} \max\left\{ \sum_{j=1}^{k} \sum_{v \in V} a_{vj} x_{vj} \ : \ (x, w) \ k\text{-coloreo} \right\}, & k \geq \chi \\ 0, & \text{sino} \end{cases}$$

$$r_k^{\mathcal{ECP}} = \begin{cases} \max\left\{ \sum_{j=1}^{k} \sum_{v \in V} a_{vj} x_{vj} \ : \ (x, w) \ k\text{-eqcol} \right\}, & k \geq \chi_{eq} \wedge k \notin S \\ 0, & \text{sino} \end{cases}$$

- $\mathcal{ECP} \subset \mathcal{CP} \implies r_k^{\mathcal{ECP}} \leq r_k^{\mathcal{CP}}$.

Desigualdades válidas genéricas

- Cualquier faceta (salvo $w_{j+1} \leq w_j$) de $\mathcal{CP}$ o $\mathcal{ECP}$ puede ser definida con una desigualdad de la forma

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{v \in V} a_{vj} x_{vj} \leq r_n w_n + \sum_{k=1}^{n-1} r_k (w_k - w_{k+1}),$$

donde $a_{vj} \in \mathbb{Z}_+$ y

$$r_k^{\mathcal{CP}} = \begin{cases} \max\left\{ \sum_{j=1}^{k} \sum_{v \in V} a_{vj} x_{vj} \ : \ (x, w) \ k\text{-coloreo} \right\}, & k \geq \chi \\ 0, & \text{sino} \end{cases}$$

$$r_k^{\mathcal{ECP}} = \begin{cases} \max\left\{ \sum_{j=1}^{k} \sum_{v \in V} a_{vj} x_{vj} \ : \ (x, w) \ k\text{-eqcol} \right\}, & k \geq \chi_{eq} \wedge k \notin S \\ 0, & \text{sino} \end{cases}$$

- $\mathcal{ECP} \subset \mathcal{CP} \implies r_k^{\mathcal{ECP}} \leq r_k^{\mathcal{CP}}$.

Desigualdades válidas genéricas

- Caso particular: $a_{vj} \in \{0, 1\}$

$$V_1, V_2, \ldots, V_n \subset V$$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{v \in V_j} x_{vj} \leq r_n w_n + \sum_{k=1}^{n-1} r_k (w_k - w_{k+1}),$$

- Ejemplo: $V_{n-2} = V$, $V_j = \varnothing \;\; \forall\, j \neq n-2$ (equidad col. $n-2$)

$$(\star) \quad \sum_{v \in V} x_{vn-2} \leq 2w_{n+2} - w_n$$

$$r_{n-2}^{\mathcal{ECP}} = \left\lceil \frac{n}{n-2} \right\rceil = 2 < 3 = r_{n-2}^{\mathcal{CP}}$$

$\therefore \quad (\star)$ es válida en $\mathcal{ECP}$ pero no en $\mathcal{CP}$.

Desigualdades válidas genéricas

- Caso particular: $a_{vj} \in \{0, 1\}$

$$V_1, V_2, \ldots, V_n \subset V$$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{v \in V_j} x_{vj} \leq r_n w_n + \sum_{k=1}^{n-1} r_k (w_k - w_{k+1}),$$

- Ejemplo: $V_{n-2} = V, \; V_j = \varnothing \;\; \forall \, j \neq n-2$ (equidad col. $n-2$)

$$(\star) \quad \sum_{v \in V} x_{vn-2} \leq 2w_{n+2} - w_n$$

$$r_{n-2}^{\mathcal{ECP}} = \left\lceil \frac{n}{n-2} \right\rceil = 2 < 3 = r_{n-2}^{\mathcal{CP}}$$

$\therefore \quad (\star)$ es válida en $\mathcal{ECP}$ pero no en $\mathcal{CP}$.

Desigualdades válidas heredadas de $\mathcal{CP}$

$$V_j = Q,\ \ V_l = \varnothing \ \ \forall\ l \neq j$$

Desigualdades Clique [Méndez-Díaz I. y Zabala P. (2005)]

Sea $Q \subset V$ clique, $|Q| \geq 2$ y $j = 1, \ldots, n-1$. Entonces

$$\sum_{v \in Q} x_{vj} \leq w_j$$

es **válida** para $\mathcal{CP}$.

Además define **faceta** de $\mathcal{CP}$ si y sólo si Q es maximal.

Desigualdades válidas heredadas de $\mathcal{CP}$

$$V_j = Q, \;\; V_l = \varnothing \quad \forall\, l \neq j$$

Desigualdades Clique [Méndez-Díaz I. y Zabala P. (2005)]

Sea $Q \subset V$ clique, $|Q| \geq 2$ y $j = 1, \ldots, n-1$. Entonces

$$\sum_{v \in Q} x_{vj} \leq w_j$$

es **válida** para $\mathcal{CP}$.
Además define **faceta** de $\mathcal{CP}$ si y sólo si Q es maximal.

Desigualdades válidas heredadas de $\mathcal{CP}$

$$V_j = Q,\ V_l = \varnothing \quad \forall\ l \neq j$$

Desigualdades Clique

Sea $Q \subset V$ clique, $|Q| \geq 2$ y $j = 1, \ldots, n-1$. Entonces

$$\sum_{v \in Q} x_{vj} \leq w_j$$

es **válida** para $\mathcal{ECP}$.
Además define **faceta** de $\mathcal{ECP}$ si y sólo si Q es maximal.

Desigualdades válidas heredadas de $\mathcal{CP}$

$$V_k = \{v\} \ \ \forall\ k \geq j, \ \ V_k = \varnothing \ \ \forall\ k < j$$

Desigualdades Block [Méndez-Díaz I. y Zabala P. (2005)]

Sea $v \in V$ y $j = 1, \ldots, n-1$. Entonces

$$\sum_{k=j}^{n} x_{vk} \leq w_j$$

es **válida** para $\mathcal{CP}$.

Además, define **faceta** de $\mathcal{CP}$ si y sólo si se verifican:

- $j - 1 \geq \chi(G)$.
- $j = n - 1 \implies v$ no es un vértice universal.

Desigualdades válidas heredadas de $\mathcal{CP}$

$$V_k = \{v\} \;\; \forall\; k \geq j, \;\; V_k = \varnothing \;\; \forall\; k < j$$

Desigualdades Block [Méndez-Díaz I. y Zabala P. (2005)]

Sea $v \in V$ y $j = 1, \ldots, n-1$. Entonces

$$\sum_{k=j}^{n} x_{vk} \leq w_j$$

es **válida** para $\mathcal{CP}$.
Además, define **faceta** de $\mathcal{CP}$ si y sólo si se verifican:

- $j - 1 \geq \chi(G)$.
- $j = n - 1 \quad \Longrightarrow \quad v$ no es un vértice universal.

Desigualdades válidas heredadas de $\mathcal{CP}$

$$V_k = \{v\} \ \ \forall\ k \geq j,\ \ V_k = \varnothing \ \ \forall\ k < j$$

Desigualdades Block

Sea $v \in V$ y $j = 1, \ldots, n-1$. Entonces

$$\sum_{k=j}^{n} x_{vk} \leq w_j$$

es **válida** para $\mathcal{ECP}$.
Además, define **faceta** de $\mathcal{ECP}$ si y sólo si se verifican:

- $j - 1 \geq \chi_{eq}(G) \ \wedge \ j - 1 \notin \mathscr{S}$.
- $j = n - 1 \quad \Longrightarrow \quad v$ no es un vértice universal.

Nuevas desigualdades válidas de $\mathcal{ECP}$

¿Si consideramos un conjunto de vértices S y un conjunto de colores C?

$$V_j = S \;\; \forall\, j \in C, \;\; V_j = \varnothing \;\; \forall\, j \notin C$$

- *Desigualdades CS*:

$$\sum_{j \in C} \sum_{v \in S} x_{vj} \leq \sum_{k=1}^{n-1} r_{(k,C,S)} \big(w_k - w_{k+1} \big) + r_{(n,C,S)} w_n,$$

donde $r_{(k,C,S)}$ = máxima cant. de vértices de S que pueden ser pintados con C en un k-eqcol.

- S clique $\longrightarrow$ es comb. lineal de desig. cliques.
- S no clique $\longrightarrow$ se pueden *liftear* términos.

Nuevas desigualdades válidas de $\mathcal{ECP}$

¿Si consideramos un conjunto de vértices S y un conjunto de colores C?

$$V_j = S \ \ \forall\, j \in C, \ \ V_j = \varnothing \ \ \forall\, j \notin C$$

- *Desigualdades CS*:

$$\sum_{j \in C} \sum_{v \in S} x_{vj} \leq \sum_{k=1}^{n-1} r_{(k,C,S)} \left(w_k - w_{k+1} \right) + r_{(n,C,S)} w_n,$$

donde $r_{(k,C,S)}$ = máxima cant. de vértices de S que pueden ser pintados con C en un k-eqcol.

- S clique $\longrightarrow$ es comb. lineal de desig. cliques.
- S no clique $\longrightarrow$ se pueden *liftear* términos.

Nuevas desigualdades válidas de $\mathcal{ECP}$

¿Si consideramos un conjunto de vértices S y un conjunto de colores C?

$$V_j = S \ \ \forall\, j \in C, \ \ V_j = \varnothing \ \ \forall\, j \notin C$$

- *Desigualdades CS*:

$$\sum_{j \in C} \sum_{v \in S} x_{vj} \leq \sum_{k=1}^{n-1} r_{(k,C,S)} \big(w_k - w_{k+1} \big) + r_{(n,C,S)} w_n,$$

  donde $r_{(k,C,S)}$ = máxima cant. de vértices de S que pueden ser pintados con C en un k-eqcol.

- S clique $\longrightarrow$ es comb. lineal de desig. cliques.
- S no clique $\longrightarrow$ se pueden *liftear* términos.

Nuevas desigualdades válidas de $\mathcal{ECP}$

¿Si consideramos un conjunto de vértices S y un conjunto de colores C?

$$V_j = S \ \ \forall\, j \in C, \ \ V_j = \varnothing \ \ \forall\, j \notin C$$

- *Desigualdades CS*:

$$\sum_{j \in C} \sum_{v \in S} x_{vj} \leq \sum_{k=1}^{n-1} r_{(k,C,S)} \big(w_k - w_{k+1} \big) + r_{(n,C,S)} w_n,$$

  donde $r_{(k,C,S)}$ = máxima cant. de vértices de S que pueden ser pintados con C en un k-eqcol.

- S clique $\longrightarrow$ es comb. lineal de desig. cliques.
- S no clique $\longrightarrow$ se pueden *liftear* términos.

Validez desigualdades CS

Validez desigualdades CS (lifteadas)

Sea $S \subset V$ tal que $2 \leq |S| \leq n-1$.
Sea $C \subset \{1, \ldots, n-2\}$ tal que $|C| < |S|$. Entonces

$$\sum_{j \in C} \sum_{v \in S} x_{vj} + \sum_{v \in V} x_{vn-1} \leq \sum_{k=1}^{n} r_{(k,C,S)} \left(w_k - w_{k+1} \right) + w_{n-1} + |C| w_n.$$

es **válida** $\Leftrightarrow$ S no es una clique.

- $V_j = S \quad \forall j \in C, \; V_{n-1} = V, \; V_j = \varnothing \quad \forall j \notin C \cup \{n-1\}$:
  - S no clique $\longrightarrow$ obtenemos la misma.
  - S clique $\longrightarrow$ obtenemos similar con $+2w_{n-1}$ que es comb. lineal de desig. cliques y equidad $n-1$.

Validez desigualdades CS

Validez desigualdades CS (lifteadas)

Sea $S \subset V$ tal que $2 \leq |S| \leq n-1$.
Sea $C \subset \{1, \ldots, n-2\}$ tal que $|C| < |S|$. Entonces

$$\sum_{j \in C} \sum_{v \in S} x_{vj} + \sum_{v \in V} x_{vn-1} \leq \sum_{k=1}^{n} r_{(k,C,S)} \left(w_k - w_{k+1} \right) + w_{n-1} + |C| w_n.$$

es **válida** $\Leftrightarrow$ S no es una clique.

- $V_j = S \;\; \forall\, j \in C, \;\; V_{n-1} = V, \;\; V_j = \varnothing \;\; \forall\, j \notin C \cup \{n-1\}$:
  - S no clique $\longrightarrow$ obtenemos la misma.
  - S clique $\longrightarrow$ obtenemos similar con $+2w_{n-1}$ que es comb. lineal de desig. cliques y equidad $n-1$.

Facetitud desigualdades CS

Facetitud desigualdades CS (lifteadas)

Sea $S \subset V$ tal que $3 \leq |S| \leq n-2$ y S no es una clique.
Sea $C \subset \{1, \ldots, n-2\}$ tal que $|C| = |S| - 1$.
Supongamos que $\forall\ v \in V \backslash S$, $\exists\ v^1, v^2, v^3, v^4 \in S \cup \{v\}$ distintos tales que $v^1 v^2 \notin E$ y $v^3 v^4 \notin E$. Entonces

$$\sum_{j \in C} \sum_{v \in S} x_{vj} + \sum_{v \in V} x_{vn-1} \leq \sum_{k=1}^{n} r_{(k,C,S)} \left(w_k - w_{k+1} \right) + w_{n-1} + |C| w_n.$$

define **faceta** de $\mathcal{ECP} \Leftrightarrow V \backslash S$ no es una clique.

Facetitud desigualdades CS

- Si no se dan las cond. suficientes puede ocurrir:
  - faceta
  - $\exists\ v \notin S\ :\ \forall\ j \in C,\ x_{vj} = 0$
    lifting $\longrightarrow$ crece S $\longrightarrow$ desig. CS con $|C| = |S| - 2$
  - $\sum_{v \in V} x_{vn-2} = w_{n-2}$
    lifting $\longrightarrow$ aparecen $+\sum_{v \in V} x_{vn-2}$ y $+w_{n-2}$
  - si $C = \{1, 2, \ldots, p\}$, puede que:
    $\exists\ v \notin S\ :\ \sum_{k=p+1}^{n} x_{vk} + x_{vk+1} + \ldots + x_{vn} = w_k$
  - otros casos?
- Difícil (hay que lidiar con k-eqcols afin. indep. tales que $k < n/2 \Leftrightarrow |C_j| \geq 2$).

Facetitud desigualdades CS

- Si no se dan las cond. suficientes puede ocurrir:
  - faceta
  - $\exists\ v \notin S\ :\ \forall\ j \in C,\ x_{vj} = 0$
    lifting $\longrightarrow$ crece S $\longrightarrow$ desig. CS con $|C| = |S| - 2$
  - $\sum_{v \in V} x_{vn-2} = w_{n-2}$
    lifting $\longrightarrow$ aparecen $+\sum_{v \in V} x_{vn-2}$ y $+w_{n-2}$
  - si $C = \{1, 2, \ldots, p\}$, puede que:
    $\exists\ v \notin S\ :\ \sum_{k=p+1}^{n} x_{vk} + x_{vk+1} + \ldots + x_{vn} = w_k$
  - otros casos?
- Difícil (hay que lidiar con k-eqcols afin. indep. tales que $k < n/2 \Leftrightarrow |C_j| \geq 2$).

Facetitud desigualdades CS

- Si no se dan las cond. suficientes puede ocurrir:
  - faceta
  - $\exists\ v \notin S\ :\ \forall\ j \in C,\ x_{vj} = 0$
    lifting $\longrightarrow$ crece S $\longrightarrow$ desig. CS con $|C| = |S| - 2$
  - $\sum_{v \in V} x_{vn-2} = w_{n-2}$
    lifting $\longrightarrow$ aparecen $+\sum_{v \in V} x_{vn-2}$ y $+w_{n-2}$
  - si $C = \{1, 2, \dots, p\}$, puede que:
    $\exists\ v \notin S\ :\ \sum_{k=p+1}^{n} x_{vk} + x_{vk+1} + \ldots + x_{vn} = w_k$
  - otros casos?
- Difícil (hay que lidiar con k-eqcols afin. indep. tales que $k < n/2 \Leftrightarrow |C_j| \geq 2$).

Facetitud desigualdades CS

- Si no se dan las cond. suficientes puede ocurrir:
  - faceta
  - $\exists\ v \notin S\ :\ \forall\ j \in C,\ x_{vj} = 0$
    lifting $\longrightarrow$ crece S $\longrightarrow$ desig. CS con $|C| = |S| - 2$
  - $\sum_{v \in V} x_{vn-2} = w_{n-2}$
    lifting $\longrightarrow$ aparecen $+\sum_{v \in V} x_{vn-2}$ y $+w_{n-2}$
  - si $C = \{1, 2, \ldots, p\}$, puede que:
    $\exists\ v \notin S\ :\ \sum_{k=p+1}^{n} x_{vk} + x_{vk+1} + \ldots + x_{vn} = w_k$
  - otros casos?
- Difícil (hay que lidiar con k-eqcols afin. indep. tales que $k < n/2 \Leftrightarrow |C_j| \geq 2$).

Facetitud desigualdades CS

- Si no se dan las cond. suficientes puede ocurrir:
  - faceta
  - $\exists\ v \notin S\ :\ \forall\ j \in C,\ x_{vj} = 0$
    lifting $\longrightarrow$ crece S $\longrightarrow$ desig. CS con $|C| = |S| - 2$
  - $\sum_{v \in V} x_{vn-2} = w_{n-2}$
    lifting $\longrightarrow$ aparecen $+\sum_{v \in V} x_{vn-2}$ y $+w_{n-2}$
  - si $C = \{1, 2, \ldots, p\}$, puede que:
    $\exists\ v \notin S\ :\ \sum_{k=p+1}^{n} x_{vk} + x_{vk+1} + \ldots + x_{vn} = w_k$
  - otros casos?
- Difícil (hay que lidiar con k-eqcols afin. indep. tales que $k < n/2 \Leftrightarrow |C_j| \geq 2$).

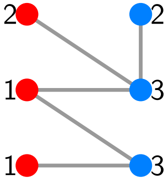
Facetitud desigualdades CS

- Si no se dan las cond. suficientes puede ocurrir:
  - faceta
  - $\exists\ v \notin S\ :\ \forall\ j \in C,\ x_{vj} = 0$
    lifting $\longrightarrow$ crece S $\longrightarrow$ desig. CS con $|C| = |S| - 2$
  - $\sum_{v \in V} x_{vn-2} = w_{n-2}$
    lifting $\longrightarrow$ aparecen $+\sum_{v\in V} x_{vn-2}$ y $+w_{n-2}$
  - si $C = \{1, 2, \ldots, p\}$, puede que:
    $\exists\ v \notin S\ :\ \sum_{k=p+1}^{n} x_{vk} + x_{vk+1} + \ldots + x_{vn} = w_k$
  - otros casos?
- Difícil (hay que lidiar con k-eqcols afin. indep. tales que $k < n/2 \Leftrightarrow |C_j| \geq 2$).

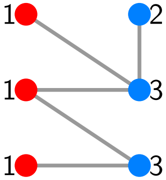
¿También son válidas en $\mathcal{CP}$?

$$S = \text{vért. rojos} \qquad C = \{1, 4\}$$

$$\sum_{j \in C} \sum_{v \in S} x_{vj} + \sum_{v \in V} x_{v5} \leq 2w_3 + w_4 + w_5 - w_6$$



$3 - eqcol$



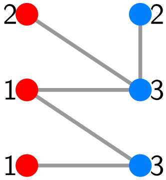
$3 - coloreo$

- Válida en $\mathcal{ECP}$, no en $\mathcal{CP}$. También faceta de $\mathcal{ECP}$.
- $r_3^{\mathcal{ECP}} = 2 < 3 = r_3^{\mathcal{CP}}$.

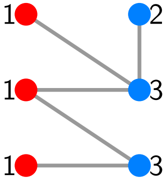
¿También son válidas en $\mathcal{CP}$?

$$S = \text{vért. rojos} \qquad C = \{1, 4\}$$

$$\sum_{j \in C} \sum_{v \in S} x_{vj} + \sum_{v \in V} x_{v5} \leq 2w_3 + w_4 + w_5 - w_6$$



$3 - eqcol$



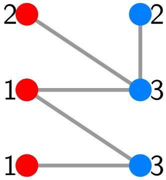
$3 - coloreo$

- Válida en $\mathcal{ECP}$, no en $\mathcal{CP}$. También faceta de $\mathcal{ECP}$.
- $r_3^{\mathcal{ECP}} = 2 < 3 = r_3^{\mathcal{CP}}$.

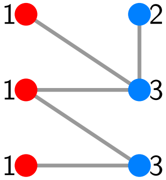
¿También son válidas en $\mathcal{CP}$?

$$S = \text{vért. rojos} \qquad C = \{1, 4\}$$

$$\sum_{j \in C} \sum_{v \in S} x_{vj} + \sum_{v \in V} x_{v5} \leq 2w_3 + w_4 + w_5 - w_6$$



$3 - eqcol$



$3 - coloreo$

- Válida en $\mathcal{ECP}$, no en $\mathcal{CP}$. También faceta de $\mathcal{ECP}$.
- $r_3^{\mathcal{ECP}} = 2 < 3 = r_3^{\mathcal{CP}}$.

Separación de desigualdades CS

- *Problema*: Calcular $r_{(k,C,S)}$ es "difícil" en G arbitrario.
- $I_n =$ grafo de n vértices aislados.
  - Calcular $r_{(k,C,S)}$ es $O(n)$ para I_n.
  - $r^{I_n}_{(k,C,S)} \geq r^{G}_{(k,C,S)} \longrightarrow$ se puede construir desig. CS válidas para G usando las de I_n.
  - Sin embargo, resultan muy débiles.
- Trabajos futuros:
  - Mejorar la cota de $r^{G}_{(k,C,S)}$.
  - Investigar desig. CSv: $\sum_{j \in C} \sum_{u \in V} x_{uj} + \sum_{j \in C'} x_{vj} \leq \ldots$
    $I_5 \rightarrow$ no neg. $+ (w_{j+1} \leq w_j) +$ block $+$ equidad $+$ CS $+$ CSv
  - Buscar otras familias de desigualdades válidas para $\mathcal{ECP}$.

Separación de desigualdades CS

- *Problema*: Calcular $r_{(k,C,S)}$ es "difícil" en G arbitrario.
- $I_n =$ grafo de n vértices aislados.
  - Calcular $r_{(k,C,S)}$ es $O(n)$ para I_n.
  - $r^{I_n}_{(k,C,S)} \geq r^{G}_{(k,C,S)} \longrightarrow$ se puede construir desig. CS válidas para G usando las de I_n.
  - Sin embargo, resultan muy débiles.
- Trabajos futuros:
  - Mejorar la cota de $r^{G}_{(k,C,S)}$.
  - Investigar desig. CSv: $\sum_{j \in C} \sum_{u \in V} x_{uj} + \sum_{j \in C'} x_{vj} \leq \ldots$
    $I_5 \rightarrow$ no neg. $+ (w_{j+1} \leq w_j) +$ block $+$ equidad $+$ CS $+$ CSv
  - Buscar otras familias de desigualdades válidas para $\mathcal{ECP}$.

Separación de desigualdades CS

- *Problema*: Calcular $r_{(k,C,S)}$ es "difícil" en G arbitrario.
- $I_n =$ grafo de n vértices aislados.
    - Calcular $r_{(k,C,S)}$ es $O(n)$ para I_n.
    - $r^{I_n}_{(k,C,S)} \geq r^{G}_{(k,C,S)} \longrightarrow$ se puede construir desig. CS válidas para G usando las de I_n.
    - Sin embargo, resultan muy débiles.
- Trabajos futuros:
    - Mejorar la cota de $r^{G}_{(k,C,S)}$.
    - Investigar desig. CSv: $\sum_{j \in C} \sum_{u \in V} x_{uj} + \sum_{j \in C'} x_{vj} \leq \ldots$
      $I_5 \rightarrow$ no neg. $+ (w_{j+1} \leq w_j) +$ block $+$ equidad $+$ CS $+$ CSv
    - Buscar otras familias de desigualdades válidas para $\mathcal{ECP}$.

Separación de desigualdades CS

- *Problema*: Calcular $r_{(k,C,S)}$ es "difícil" en G arbitrario.
- $I_n =$ grafo de n vértices aislados.
  - Calcular $r_{(k,C,S)}$ es $O(n)$ para I_n.
  - $r^{I_n}_{(k,C,S)} \geq r^G_{(k,C,S)} \longrightarrow$ se puede construir desig. CS válidas para G usando las de I_n.
  - Sin embargo, resultan muy débiles.
- Trabajos futuros:
  - Mejorar la cota de $r^G_{(k,C,S)}$.
  - Investigar desig. CSv: $\sum_{j \in C} \sum_{u \in V} x_{uj} + \sum_{j \in C'} x_{vj} \leq \ldots$
    $I_5 \rightarrow$ no neg. $+ (w_{j+1} \leq w_j) +$ block $+$ equidad $+$ CS $+$ CSv
  - Buscar otras familias de desigualdades válidas para $\mathcal{ECP}$.

Separación de desigualdades CS

- *Problema*: Calcular $r_{(k,C,S)}$ es "difícil" en G arbitrario.
- $I_n =$ grafo de n vértices aislados.
    - Calcular $r_{(k,C,S)}$ es $O(n)$ para I_n.
    - $r^{I_n}_{(k,C,S)} \geq r^{G}_{(k,C,S)} \longrightarrow$ se puede construir desig. CS válidas para G usando las de I_n.
    - Sin embargo, resultan muy débiles.
- Trabajos futuros:
    - Mejorar la cota de $r^{G}_{(k,C,S)}$.
    - Investigar desig. CSv: $\sum_{j \in C} \sum_{u \in V} x_{uj} + \sum_{j \in C'} x_{vj} \leq \ldots$
      $I_5 \rightarrow$ no neg. $+ (w_{j+1} \leq w_j) +$ block $+$ equidad $+$ CS $+$ CSv
    - Buscar otras familias de desigualdades válidas para $\mathcal{ECP}$.

Separación de desigualdades CS

- *Problema*: Calcular $r_{(k,C,S)}$ es "difícil" en G arbitrario.
- $I_n =$ grafo de n vértices aislados.
  - Calcular $r_{(k,C,S)}$ es $O(n)$ para I_n.
  - $r^{I_n}_{(k,C,S)} \geq r^{G}_{(k,C,S)} \longrightarrow$ se puede construir desig. CS válidas para G usando las de I_n.
  - Sin embargo, resultan muy débiles.
- Trabajos futuros:
  - Mejorar la cota de $r^{G}_{(k,C,S)}$.
  - Investigar desig. CSv: $\sum_{j\in C}\sum_{u\in V} x_{uj} + \sum_{j\in C'} x_{vj} \leq \ldots$
    $I_5 \rightarrow$ no neg. $+ (w_{j+1} \leq w_j) +$ block $+$ equidad $+$ CS $+$ CSv
  - Buscar otras familias de desigualdades válidas para $\mathcal{ECP}$.

Separación de desigualdades CS

- *Problema*: Calcular $r_{(k,C,S)}$ es "difícil" en G arbitrario.
- $I_n =$ grafo de n vértices aislados.
    - Calcular $r_{(k,C,S)}$ es $O(n)$ para I_n.
    - $r^{I_n}_{(k,C,S)} \geq r^{G}_{(k,C,S)} \longrightarrow$ se puede construir desig. CS válidas para G usando las de I_n.
    - Sin embargo, resultan muy débiles.
- Trabajos futuros:
    - Mejorar la cota de $r^{G}_{(k,C,S)}$.
    - Investigar desig. CSv: $\sum_{j \in C} \sum_{u \in V} x_{uj} + \sum_{j \in C'} x_{vj} \leq \ldots$
      $I_5 \rightarrow$ no neg. $+ (w_{j+1} \leq w_j) +$ block $+$ equidad $+$ CS $+$ CSv
    - Buscar otras familias de desigualdades válidas para $\mathcal{ECP}$.

GRACIAS!