Reducción de los Esquemas de Recursión

★ Tesina de Grado ★

Daniel E. Severin

Dirección

Gabriela Argiroffo

Introducción

Objetivos de la Teoría de la Computación

Uno de los objetivos fundamentales es buscar *conjuntos minimales* de operaciones que encapsulen un cierto poder de cómputo.

Objetivos de la Teoría de la Computación

Uno de los objetivos fundamentales es buscar *conjuntos minimales* de operaciones que encapsulen un cierto poder de cómputo.

Formalismos con el mismo poder de cómputo que cualquier lenguaje de propósito general son:

- Máquinas de Turing
- Funciones Recursivas Generales
- Máquinas de Registros
- Lambda Cálculo

Definición de Formalismo

Es un conjunto de funciones generadas inductivamente por la aplicación de ciertos operadores, y que trabajan sobre un dominio común.

Definición de Formalismo

Es un conjunto de funciones generadas inductivamente por la aplicación de ciertos operadores, y que trabajan sobre un dominio común.

Las funciones recursivas generales componen un formalismo, en donde los operadores son *cero*, *sucesor*, *proyección*, *composición*, *recursión primitiva* y *minimización*, y el dominio son los conjuntos $\mathbb{N}^n$.

Representabilidad entre Formalismos

Un formalismo compuesto de funciones $f : A \to A$ puede ser representado por otro formalismo compuesto de funciones $g : B \to B$ cuando existen funciones $\mathfrak{D}$ y $\mathfrak{P}$ tales que

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathfrak{D}"'] & A \arrow[d, "\mathfrak{D}"] \\ B \arrow[r, "g = \mathfrak{P}(f)"'] & B \end{tikzcd}$$

$\mathfrak{D}$ debe ser inyectiva.

Representabilidad entre Formalismos

- Sean X e Y dos formalismos. Denotamos el hecho de que X puede ser representado por Y con $X \dot{\subset} Y$. Por ejemplo:

$$\texttt{AutómatasRegulares} \ \dot{\subset} \ \texttt{AutómatasPila}$$

Representabilidad entre Formalismos

- Sean X e Y dos formalismos. Denotamos el hecho de que X puede ser representado por Y con $X \dot{\subset} Y$. Por ejemplo:

$$\texttt{AutómatasRegulares} \ \dot{\subset} \ \texttt{AutómatasPila}$$

- Si se cumple en ambos sentidos ($Y \dot{\subset} X$ y $X \dot{\subset} Y$) entonces diremos que X tiene el mismo poder de expresión que Y, y lo denotamos con $X \doteq Y$. Por ejemplo:

$$\texttt{MáquinasTuring} \ \doteq \ \texttt{FuncRecGenerales}$$

Motivación

- Las funciones recursivas trabajan sobre $\mathbb{N}^n$. La idea de esta tesina será proponer formalismos que tengan el mismo poder de expresión que las funciones recursivas, pero que sean más sencillos (trabajarán sobre $\mathbb{N}$ únicamente). Por ejemplo:

$$\mathtt{FuncUnariasGenerales} \doteq \mathtt{FuncRecGenerales}$$

Motivación

- Las funciones recursivas trabajan sobre $\mathbb{N}^n$. La idea de esta tesina será proponer formalismos que tengan el mismo poder de expresión que las funciones recursivas, pero que sean más sencillos (trabajarán sobre $\mathbb{N}$ únicamente). Por ejemplo:

$$\texttt{FuncUnariasGenerales} \doteq \texttt{FuncRecGenerales}$$

- También se investigarán técnicas para simplificar esquemas de recursión. Por ejemplo, la *minimización* puede ser reemplazada por un esquema más básico llamado *inversión*.

Funciones Recursivas

Funciones Recursivas Primitivas

- Compuesta por los esquemas:

Funciones Recursivas Primitivas

- Compuesta por los esquemas:

1) $\zeta : \overline{\mathrm{FRP}}$ | $\zeta() = 0$

Funciones Recursivas Primitivas

- Compuesta por los esquemas:

1) $\zeta : \overline{\mathrm{FRP}}$ | $\zeta() = 0$

2) $\sigma : \overline{\mathrm{FRP}}$ | $\sigma(x) = x + 1$

Funciones Recursivas Primitivas

- Compuesta por los esquemas:

1) $\zeta : \overline{\mathrm{FRP}} \mid \zeta() = 0$

2) $\sigma : \overline{\mathrm{FRP}} \mid \sigma(x) = x + 1$

3) $\pi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \overline{\mathrm{FRP}} \mid \pi_i^n(\mathbf{x}) = x_i$

Funciones Recursivas Primitivas

- Compuesta por los esquemas:

1) $\zeta : \overline{\mathrm{FRP}}$ | $\zeta() = 0$

2) $\sigma : \overline{\mathrm{FRP}}$ | $\sigma(x) = x + 1$

3) $\pi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \overline{\mathrm{FRP}}$ | $\pi_i^n(\mathbf{x}) = x_i$

4) $\phi : \overline{\mathrm{FRP}}^{n+1} \rightarrow \overline{\mathrm{FRP}}$ | $\phi[\varphi, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n](\mathbf{x}) = \varphi(\omega_1(\mathbf{x}), \omega_2(\mathbf{x}), \ldots, \omega_n(\mathbf{x}))$

Funciones Recursivas Primitivas

- Compuesta por los esquemas:

1) $\zeta : \overline{\mathrm{FRP}}$ | $\zeta() = 0$

2) $\sigma : \overline{\mathrm{FRP}}$ | $\sigma(x) = x + 1$

3) $\pi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \overline{\mathrm{FRP}}$ | $\pi_i^n(\mathbf{x}) = x_i$

4) $\phi : \overline{\mathrm{FRP}}^{n+1} \to \overline{\mathrm{FRP}}$ | $\phi[\varphi, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n](\mathbf{x}) = \varphi(\omega_1(\mathbf{x}), \omega_2(\mathbf{x}), \ldots, \omega_n(\mathbf{x}))$

5) $\rho : \overline{\mathrm{FRP}}^2 \to \overline{\mathrm{FRP}}$ | $\rho[\alpha, \beta](\mathbf{x}, 0) = \alpha(\mathbf{x})$
| $\rho[\alpha, \beta](\mathbf{x}, y + 1) = \beta(\mathbf{x}, y, \rho[\alpha, \beta](\mathbf{x}, y))$

Funciones Recursivas Primitivas

- Compuesta por los esquemas:

1) $\zeta : \overline{\mathrm{FRP}}$ | $\zeta() = 0$

2) $\sigma : \overline{\mathrm{FRP}}$ | $\sigma(x) = x + 1$

3) $\pi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \overline{\mathrm{FRP}}$ | $\pi_i^n(\mathbf{x}) = x_i$

4) $\phi : \overline{\mathrm{FRP}}^{n+1} \to \overline{\mathrm{FRP}}$ | $\phi[\varphi, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n](\mathbf{x}) = \varphi(\omega_1(\mathbf{x}), \omega_2(\mathbf{x}), \ldots, \omega_n(\mathbf{x}))$

5) $\rho : \overline{\mathrm{FRP}}^2 \to \overline{\mathrm{FRP}}$ | $\rho[\alpha, \beta](\mathbf{x}, 0) = \alpha(\mathbf{x})$
| $\rho[\alpha, \beta](\mathbf{x}, y + 1) = \beta(\mathbf{x}, y, \rho[\alpha, \beta](\mathbf{x}, y))$

- Ejemplo: $cero(x) = 0$
Se escribe $cero \equiv \rho[\zeta, \pi_2^2]$

Funciones Recursivas Primitivas

- Compuesta por los esquemas:

1) $\zeta : \overline{\mathrm{FRP}} \mid \zeta() = 0$

2) $\sigma : \overline{\mathrm{FRP}} \mid \sigma(x) = x + 1$

3) $\pi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \overline{\mathrm{FRP}} \mid \pi_i^n(\mathbf{x}) = x_i$

4) $\phi : \overline{\mathrm{FRP}}^{n+1} \to \overline{\mathrm{FRP}} \mid \phi[\varphi, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n](\mathbf{x}) = \varphi(\omega_1(\mathbf{x}), \omega_2(\mathbf{x}), \ldots, \omega_n(\mathbf{x}))$

5) $\rho : \overline{\mathrm{FRP}}^2 \to \overline{\mathrm{FRP}} \mid \rho[\alpha, \beta](\mathbf{x}, 0) = \alpha(\mathbf{x})$
$\mid \quad \rho[\alpha, \beta](\mathbf{x}, y + 1) = \beta(\mathbf{x}, y, \rho[\alpha, \beta](\mathbf{x}, y))$

- Ejemplo: $cero(x) = 0$
  Se escribe $cero \equiv \rho[\zeta, \pi_2^2]$

- La mayoría de las funciones a valores naturales conocidas son recursivas primitivas.

Funciones de Parificación de Cantor

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{N} & \mathbb{N} \times \mathbb{N} \arrow[l, "\pi_1^2"'] \arrow[r, "\pi_2^2"] \arrow[d, "\langle \_, \_ \rangle"] & \mathbb{N} \\
& \mathbb{N} \arrow[ul, "\tau_1^2"] \arrow[ur, "\tau_2^2"'] &
\end{tikzcd}
$$

$\overset{x\rightarrow}{y\downarrow}$	0	1	2	3	4	5
0	0	2	5	9	14	20
1	1	4	8	13	19	26
2	3	7	12	18	25	33
3	6	11	17	24	32	41
4	10	16	23	31	40	50
5	15	22	30	39	49	60

Funciones de Parificación de Cantor

- Correspondencia biunívoca entre $\mathbb{N}$ y $\mathbb{N}^2$:

$$\tau_1^2(\langle x, y\rangle) = x$$

$$\tau_2^2(\langle x, y\rangle) = y$$

$$\langle \tau_1^2(z), \tau_2^2(z)\rangle = z$$

Funciones de Parificación de Cantor

- Correspondencia biunívoca entre $\mathbb{N}$ y $\mathbb{N}^2$:

$$\tau_1^2(\langle x, y\rangle) = x$$
$$\tau_2^2(\langle x, y\rangle) = y$$
$$\langle \tau_1^2(z), \tau_2^2(z)\rangle = z$$

- Propiedades de Monotonía:

$$\langle x+1, y\rangle > \langle x, y\rangle$$
$$\langle x, y+1\rangle > \langle x, y\rangle$$

Funciones de Parificación de Cantor

- Correspondencia biunívoca entre $\mathbb{N}$ y $\mathbb{N}^2$:

  $\tau_1^2(\langle x, y\rangle) = x$

  $\tau_2^2(\langle x, y\rangle) = y$

  $\langle \tau_1^2(z), \tau_2^2(z)\rangle = z$

- Propiedades de Monotonía:

  $\langle x+1, y\rangle > \langle x, y\rangle$

  $\langle x, y+1\rangle > \langle x, y\rangle$

- Se puede extender para $\mathbb{N}^n$:

  $\langle x, y, z\rangle = \langle x, \langle y, z\rangle\rangle$

  $\tau_1^3(x) = \tau_1^2(x)$

  $\tau_2^3(x) = \tau_1^2(\tau_2^2(x))$

  $\tau_3^3(x) = \tau_2^2(\tau_2^2(x))$

Estructuras de Datos

- Listas de naturales:

$$[\,] \quad \longrightarrow\!\!\!\longrightarrow \; 0$$

$$x : xs \; \longrightarrow\!\!\!\longrightarrow \; \langle x, xs \rangle + 1$$

Ej: $[3, 5, 8] \; \longrightarrow\!\!\!\longrightarrow \; \langle 3, \langle 5, \langle 8, 0 \rangle + 1 \rangle + 1 \rangle + 1$

$$foldr \in \overline{\mathrm{FRP}}$$

Estructuras de Datos

- Listas de naturales:

  $[\,] \quad \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow \; 0$

  $x : xs \; \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow \; \langle x, xs \rangle + 1$

  Ej: $[3, 5, 8] \; \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow \; \langle 3, \langle 5, \langle 8, 0 \rangle + 1 \rangle + 1 \rangle + 1$

  $foldr \in \overline{\mathrm{FRP}}$

- Conjuntos finitos:

  $C \; \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow \; 2^{\chi^C_{(0)}} + 2^{\chi^C_{(1)}} + 2^{\chi^C_{(2)}} + \dots$

  Ej: $\{3, 5, 8\} \; \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow \; 2^3 + 2^5 + 2^8$

- Listas de naturales:

  $[\,] \quad \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow \; 0$

  $x : xs \; \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow \; \langle x, xs\rangle + 1$

  Ej: $[3, 5, 8] \; \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow \; \langle 3, \langle 5, \langle 8, 0\rangle + 1\rangle + 1\rangle + 1$

  $foldr \in \overline{\mathrm{FRP}}$

- Conjuntos finitos:

  $C \; \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow \; 2^{\chi^C_{(0)}} + 2^{\chi^C_{(1)}} + 2^{\chi^C_{(2)}} + \ldots$

  Ej: $\{3, 5, 8\} \; \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow \; 2^3 + 2^5 + 2^8$

- Híbridos:

  Listas de listas, conjuntos de pares, etc

- Listas de naturales:

  $[\,] \quad \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow \; 0$

  $x : xs \; \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow \; \langle x, xs \rangle + 1$

  Ej: $[3, 5, 8] \; \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow \; \langle 3, \langle 5, \langle 8, 0 \rangle + 1 \rangle + 1 \rangle + 1$

  $foldr \in \overline{\mathrm{FRP}}$

- Conjuntos finitos:

  $C \; \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow \; 2^{\chi^C_{(0)}} + 2^{\chi^C_{(1)}} + 2^{\chi^C_{(2)}} + \ldots$

  Ej: $\{3, 5, 8\} \; \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow \; 2^3 + 2^5 + 2^8$

- Híbridos:

  Listas de listas, conjuntos de pares, etc

- Propiedad de correspondencia:

  Dos estructuras son iguales si los números que las representan lo son también

Funciones Doblemente Recursivas

1) $\varphi \in \overline{\mathrm{FRP}} \implies \varphi \in \overline{\mathrm{FDR}}$

Funciones Doblemente Recursivas

1) $\varphi \in \overline{\mathrm{FRP}} \implies \varphi \in \overline{\mathrm{FDR}}$

2) $\delta : \overline{\mathrm{FDR}}^5 \rightarrow \overline{\mathrm{FDR}}$ | $\delta[\alpha, \ldots](\mathbf{x}, 0, z) = \alpha(\mathbf{x}, z)$

| $\delta[\alpha, \ldots](\mathbf{x}, y+1, 0) = \ldots$

| $\delta[\alpha, \ldots](\mathbf{x}, y+1, z+1) = \ldots$

Funciones Doblemente Recursivas

1) $\varphi \in \overline{\mathrm{FRP}} \implies \varphi \in \overline{\mathrm{FDR}}$

2) $\delta : \overline{\mathrm{FDR}}^5 \rightarrow \overline{\mathrm{FDR}}$ | $\delta[\alpha, \ldots](\mathbf{x}, 0, z) = \alpha(\mathbf{x}, z)$

| $\delta[\alpha, \ldots](\mathbf{x}, y+1, 0) = \ldots$

| $\delta[\alpha, \ldots](\mathbf{x}, y+1, z+1) = \ldots$

- Ej: $\mathsf{A}(x, y) = \begin{cases} y+1 & x = 0 \\ \mathsf{A}(x-1, 1) & x > 0, y = 0 \\ \mathsf{A}(x-1, \mathsf{A}(x, y-1)) & x > 0, y > 0 \end{cases}$

  Se escribe $\mathsf{A} \equiv \delta[\sigma, \pi_2^2, \phi[\sigma, cero], \pi_4^4, \pi_3^3]]$

Funciones Doblemente Recursivas

1) $\varphi \in \overline{\mathrm{FRP}} \implies \varphi \in \overline{\mathrm{FDR}}$

2) $\delta : \overline{\mathrm{FDR}}^5 \to \overline{\mathrm{FDR}}$ | $\delta[\alpha, \ldots](\mathbf{x}, 0, z) = \alpha(\mathbf{x}, z)$

| $\delta[\alpha, \ldots](\mathbf{x}, y+1, 0) = \ldots$

| $\delta[\alpha, \ldots](\mathbf{x}, y+1, z+1) = \ldots$

- Ej: $\mathsf{A}(x, y) = \begin{cases} y+1 & x = 0 \\ \mathsf{A}(x-1, 1) & x > 0, y = 0 \\ \mathsf{A}(x-1, \mathsf{A}(x, y-1)) & x > 0, y > 0 \end{cases}$

  Se escribe $\mathsf{A} \equiv \delta[\sigma, \pi^2_2, \phi[\sigma, cero], \pi^4_4, \pi^3_3]]$

- $\overline{\mathrm{FRP}} \dot{\subset} \overline{\mathrm{FDR}}$ (trivial)

Funciones Doblemente Recursivas

1) $\varphi \in \overline{\mathrm{FRP}} \implies \varphi \in \overline{\mathrm{FDR}}$

2) $\delta : \overline{\mathrm{FDR}}^5 \to \overline{\mathrm{FDR}}$ | $\delta[\alpha, \ldots](\mathbf{x}, 0, z) = \alpha(\mathbf{x}, z)$

| $\delta[\alpha, \ldots](\mathbf{x}, y+1, 0) = \ldots$

| $\delta[\alpha, \ldots](\mathbf{x}, y+1, z+1) = \ldots$

- Ej: $\mathrm{A}(x, y) = \begin{cases} y+1 & x = 0 \\ \mathrm{A}(x-1, 1) & x > 0, y = 0 \\ \mathrm{A}(x-1, \mathrm{A}(x, y-1)) & x > 0, y > 0 \end{cases}$

  Se escribe $\mathrm{A} \equiv \delta[\sigma, \pi^2_2, \phi[\sigma, cero], \pi^4_4, \pi^3_3]]$
- $\overline{\mathrm{FRP}} \dot{\subset} \overline{\mathrm{FDR}}$ (trivial)
- $\overline{\mathrm{FRP}} \neq \overline{\mathrm{FDR}}$ (pues $\mathrm{A} \notin \overline{\mathrm{FRP}}$)

  No se puede reducir la doble recursión a recursión primitiva!

Funciones Doblemente Recursivas

1) $\varphi \in \overline{\mathrm{FRP}} \implies \varphi \in \overline{\mathrm{FDR}}$

2) $\delta : \overline{\mathrm{FDR}}^5 \to \overline{\mathrm{FDR}}$ | $\delta[\alpha, \ldots](\mathbf{x}, 0, z) = \alpha(\mathbf{x}, z)$

| $\delta[\alpha, \ldots](\mathbf{x}, y+1, 0) = \ldots$

| $\delta[\alpha, \ldots](\mathbf{x}, y+1, z+1) = \ldots$

- Ej: $\mathrm{A}(x, y) = \begin{cases} y+1 & x = 0 \\ \mathrm{A}(x-1, 1) & x > 0, y = 0 \\ \mathrm{A}(x-1, \mathrm{A}(x, y-1)) & x > 0, y > 0 \end{cases}$

  Se escribe $\mathrm{A} \equiv \delta[\sigma, \pi_2^2, \phi[\sigma, cero], \pi_4^4, \pi_3^3]]$
- $\overline{\mathrm{FRP}} \dot{\subset} \overline{\mathrm{FDR}}$ (trivial)
- $\overline{\mathrm{FRP}} \neq \overline{\mathrm{FDR}}$ (pues $\mathrm{A} \notin \overline{\mathrm{FRP}}$)

  No se puede reducir la doble recursión a recursión primitiva!
- Existen funciones triplemente recursivas, etc

Funciones Recursivas Generales

1) $\varphi \in \overline{\mathrm{FRP}} \implies \varphi \in \overline{\mathrm{FRG}}$

Funciones Recursivas Generales

1) $\varphi \in \overline{\mathrm{FRP}} \implies \varphi \in \overline{\mathrm{FRG}}$

2) $\mu : \overline{\mathrm{FRG}} \rightarrow \overline{\mathrm{FRG}}$ | $\mu\varphi(\mathbf{x}) = \min\limits_{y \in \mathbb{N}} \{\varphi(\mathbf{x}, y) = 0\}$

Funciones Recursivas Generales

1) $\varphi \in \overline{\text{FRP}} \implies \varphi \in \overline{\text{FRG}}$

2) $\mu : \overline{\text{FRG}} \to \overline{\text{FRG}} \mid \mu\varphi(\mathbf{x}) = \min\limits_{y \in \mathbb{N}}\{\varphi(\mathbf{x}, y) = 0\}$

- Estilo de evaluación estricto.
  Se extienden los naturales: $\mathbb{N} \cup \{\perp\}$

Funciones Recursivas Generales

1) $\varphi \in \overline{\mathrm{FRP}} \implies \varphi \in \overline{\mathrm{FRG}}$

2) $\mu : \overline{\mathrm{FRG}} \to \overline{\mathrm{FRG}}$ | $\mu\varphi(\mathbf{x}) = \min\limits_{y \in \mathbb{N}} \{\varphi(\mathbf{x}, y) = 0\}$

- Estilo de evaluación estricto.
  Se extienden los naturales: $\mathbb{N} \cup \{\perp\}$
- Ejemplo: $Undef() = \min\limits_{y \in \mathbb{N}} \{y + 1 = 0\} = \perp$
  Se escribe $Undef \equiv \mu\sigma$

Funciones Recursivas Generales

1) $\varphi \in \overline{\mathrm{FRP}} \implies \varphi \in \overline{\mathrm{FRG}}$

2) $\mu : \overline{\mathrm{FRG}} \to \overline{\mathrm{FRG}}$ | $\mu\varphi(\mathbf{x}) = \min_{y\in\mathbb{N}}\left\{\varphi(\mathbf{x}, y) = 0\right\}$

- Estilo de evaluación estricto.
  Se extienden los naturales: $\mathbb{N} \cup \{\perp\}$
- Ejemplo: $Undef() = \min_{y\in\mathbb{N}}\left\{y + 1 = 0\right\} = \perp$
  Se escribe $Undef \equiv \mu\sigma$
- Kleene: *Cualquier función recursiva a valores naturales puede ser escrita como*
  $\phi[\alpha, \mu\beta]$ donde $\alpha, \beta \in \overline{\mathrm{FRP}}$

Funciones Recursivas Generales

1) $\varphi \in \overline{\text{FRP}} \implies \varphi \in \overline{\text{FRG}}$

2) $\mu : \overline{\text{FRG}} \to \overline{\text{FRG}}$ | $\mu\varphi(\mathbf{x}) = \min\limits_{y \in \mathbb{N}} \{\varphi(\mathbf{x}, y) = 0\}$

- Estilo de evaluación estricto.
  Se extienden los naturales: $\mathbb{N} \cup \{\perp\}$
- Ejemplo: $Undef() = \min\limits_{y \in \mathbb{N}} \{y + 1 = 0\} = \perp$
  Se escribe $Undef \equiv \mu\sigma$
- Kleene: *Cualquier función recursiva a valores naturales puede ser escrita como*
  $\phi[\alpha, \mu\beta]$ donde $\alpha, \beta \in \overline{\text{FRP}}$
- En particular, $\overline{\text{FDR}} \dot{\subset} \overline{\text{FRG}}$

- Cálculo de $\mathsf{A}(1,2)$:

$$\mathsf{A}(0,1) = 2, \quad \mathsf{A}(0,2) = 3,$$
$$\mathsf{A}(0,3) = 4, \quad \mathsf{A}(1,0) = \mathsf{A}(0,1) = 2,$$
$$\mathsf{A}(1,1) = \mathsf{A}(0,\mathsf{A}(1,0)) = \mathsf{A}(0,2) = 3,$$
$$\mathsf{A}(1,2) = \mathsf{A}(0,\mathsf{A}(1,1)) = \mathsf{A}(0,3) = 4.$$

- Cálculo de $\mathsf{A}(1,2)$:

  $\mathsf{A}(0,1) = 2, \quad \mathsf{A}(0,2) = 3,$

  $\mathsf{A}(0,3) = 4, \quad \mathsf{A}(1,0) = \mathsf{A}(0,1) = 2,$

  $\mathsf{A}(1,1) = \mathsf{A}(0,\mathsf{A}(1,0)) = \mathsf{A}(0,2) = 3,$

  $\mathsf{A}(1,2) = \mathsf{A}(0,\mathsf{A}(1,1)) = \mathsf{A}(0,3) = 4.$

- $\ell = [\langle\langle 0,1\rangle,2\rangle,\langle\langle 0,2\rangle,3\rangle,\langle\langle 0,3\rangle,4\rangle,$
  $\langle\langle 1,0\rangle,2\rangle,\langle\langle 1,1\rangle,3\rangle,\langle\langle 1,2\rangle,4\rangle] =$
  $722136133944426599720787838580500415045809752718 04$

  Cómputo de $\mathsf{A}(1,2)$ se representa con $z = \langle\langle 1,2\rangle,\ell\rangle$.

- Cálculo de $\mathsf{A}(1,2)$:

  $\mathsf{A}(0,1) = 2, \quad \mathsf{A}(0,2) = 3,$

  $\mathsf{A}(0,3) = 4, \quad \mathsf{A}(1,0) = \mathsf{A}(0,1) = 2,$

  $\mathsf{A}(1,1) = \mathsf{A}(0, \mathsf{A}(1,0)) = \mathsf{A}(0,2) = 3,$

  $\mathsf{A}(1,2) = \mathsf{A}(0, \mathsf{A}(1,1)) = \mathsf{A}(0,3) = 4.$
- $\ell = [\langle\langle 0,1\rangle,2\rangle, \langle\langle 0,2\rangle,3\rangle, \langle\langle 0,3\rangle,4\rangle,$
  $\langle\langle 1,0\rangle,2\rangle, \langle\langle 1,1\rangle,3\rangle, \langle\langle 1,2\rangle,4\rangle] =$
  $722136133944426599720787838580500415045809752718 04$

  Cómputo de $\mathsf{A}(1,2)$ se representa con $z = \langle\langle 1,2\rangle, \ell\rangle$.
- $\alpha(z) = 4 \quad \leftarrow$ extrae la solución del cómputo z

- Cálculo de $\mathsf{A}(1,2)$:

  $\mathsf{A}(0,1) = 2, \quad \mathsf{A}(0,2) = 3,$

  $\mathsf{A}(0,3) = 4, \quad \mathsf{A}(1,0) = \mathsf{A}(0,1) = 2,$

  $\mathsf{A}(1,1) = \mathsf{A}(0,\mathsf{A}(1,0)) = \mathsf{A}(0,2) = 3,$

  $\mathsf{A}(1,2) = \mathsf{A}(0,\mathsf{A}(1,1)) = \mathsf{A}(0,3) = 4.$

- $\ell = [\langle\langle 0,1\rangle,2\rangle, \langle\langle 0,2\rangle,3\rangle, \langle\langle 0,3\rangle,4\rangle,$
  $\langle\langle 1,0\rangle,2\rangle, \langle\langle 1,1\rangle,3\rangle, \langle\langle 1,2\rangle,4\rangle] =$
  $7221361339444265997207878385805004150458097527180\!4$

  Cómputo de $\mathsf{A}(1,2)$ se representa con $z = \langle\langle 1,2\rangle,\ell\rangle$.

- $\alpha(z) = 4 \quad \leftarrow$ extrae la solución del cómputo z

- $\mathsf{A}(x,y) = \alpha(\min_{z\in\mathbb{N}}\{\beta(x,y,z) = 0\})$

  $\beta(x,y,z)$ verifica que el cómputo z sea de $\mathsf{A}(x,y)$

Funciones Unarias

Funciones Unarias Primitivas

1) $\mathsf{S} : \overline{\mathrm{FUP}}$

$$\mathsf{S}(x) = x + 1$$

Funciones Unarias Primitivas

1) $\mathsf{S} : \overline{\mathrm{FUP}}$

$\mathsf{S}(x) = x + 1$

2) $\_ \dot{-} \_ : \overline{\mathrm{FUP}} \times \overline{\mathrm{FUP}} \rightarrow \overline{\mathrm{FUP}}$

$$(F \dot{-} G)(x) = \begin{cases} 0 & \textbf{si } F(x) < G(x) \\ F(x) - G(x) & \textbf{si no} \end{cases}$$

Funciones Unarias Primitivas

1) $\mathsf{S} : \overline{\mathrm{FUP}}$

$\mathsf{S}(x) = x + 1$

2) $\_ \mathbin{\dot{-}} \_ : \overline{\mathrm{FUP}} \times \overline{\mathrm{FUP}} \to \overline{\mathrm{FUP}}$

$$(F \mathbin{\dot{-}} G)(x) = \begin{cases} 0 & \textbf{si } F(x) < G(x) \\ F(x) - G(x) & \textbf{si no} \end{cases}$$

3) $\_ \circ \_ : \overline{\mathrm{FUP}} \times \overline{\mathrm{FUP}} \to \overline{\mathrm{FUP}}$

$(F \circ G)(x) = F(G(x))$

1) $\mathsf{S} : \overline{\text{FUP}}$

$\mathsf{S}(x) = x + 1$

2) $\_ \dot{-} \_ : \overline{\text{FUP}} \times \overline{\text{FUP}} \to \overline{\text{FUP}}$

$$(F \dot{-} G)(x) = \begin{cases} 0 & \textbf{si } F(x) < G(x) \\ F(x) - G(x) & \textbf{si no} \end{cases}$$

3) $\_ \circ \_ : \overline{\text{FUP}} \times \overline{\text{FUP}} \to \overline{\text{FUP}}$

$(F \circ G)(x) = F(G(x))$

4) $\_^{\square} : \overline{\text{FUP}} \to \overline{\text{FUP}}$

$$F^{\square}(x) = \begin{cases} 0 & \textbf{si } x = 0 \\ F(F^{\square}(x-1)) & \textbf{si } x > 0 \end{cases}$$

Es decir, $F^{\square}(0) = 0$, $F^{\square}(1) = F(0)$, $F^{\square}(2) = F(F(0))$, ..., $F^{\square}(x) = F^{x}(0)$, ...

- Identidad: $\mathsf{S}^{\square}(x) = \mathsf{S}^{x}(0) = x$

Algunas FUPs

- Identidad: $\mathsf{S}^{\square}(x) = \mathsf{S}^{x}(0) = x$
- F. ariméticas: n, $2x$, $\lfloor x/2 \rfloor$, x^2, $\lfloor \sqrt{x} \rfloor$, $\tau_i^n(x)$, etc

Algunas FUPs

- Identidad: $\mathsf{S}^{\square}(x) = \mathsf{S}^{x}(0) = x$
- F. ariméticas: n, $2x$, $\lfloor x/2 \rfloor$, x^2, $\lfloor \sqrt{x} \rfloor$, $\tau_i^n(x)$, etc
- Suma de FUPs:
  $\_ + \_ : \overline{\mathrm{FUP}} \times \overline{\mathrm{FUP}} \to \overline{\mathrm{FUP}}$
  $(F + G)(x) = M(x) \dot{-} ((M(x) \dot{-} F(x)) \dot{-} G(x))$
  donde $M(x) \geq F(x) + G(x)$

Algunas FUPs

- Identidad: $\mathsf{S}^{\square}(x) = \mathsf{S}^{x}(0) = x$
- F. ariméticas: n, $2x$, $\lfloor x/2 \rfloor$, x^2, $\lfloor \sqrt{x} \rfloor$, $\tau_i^n(x)$, etc
- Suma de FUPs:
  $\_ + \_ : \overline{\mathrm{FUP}} \times \overline{\mathrm{FUP}} \to \overline{\mathrm{FUP}}$
  $(F+G)(x) = M(x) \dot{-} ((M(x) \dot{-} F(x)) \dot{-} G(x))$
  donde $M(x) \geq F(x) + G(x)$
- Producto de FUPs:
  $\_.\_ : \overline{\mathrm{FUP}} \times \overline{\mathrm{FUP}} \to \overline{\mathrm{FUP}}$
  $$(F.G)(x) = \frac{(F(x)+G(x))^2 \dot{-} F(x)^2 \dot{-} G(x)^2}{2}$$

Algunas FUPs

- Identidad: $\mathsf{S}^{\square}(x) = \mathsf{S}^{x}(0) = x$
- F. ariméticas: n, $2x$, $\lfloor x/2 \rfloor$, x^2, $\lfloor \sqrt{x} \rfloor$, $\tau_i^n(x)$, etc
- Suma de FUPs:

  $\_ + \_ : \overline{\mathrm{FUP}} \times \overline{\mathrm{FUP}} \rightarrow \overline{\mathrm{FUP}}$

  $(F+G)(x) = M(x) \dot{-} ((M(x) \dot{-} F(x)) \dot{-} G(x))$

  donde $M(x) \geq F(x) + G(x)$
- Producto de FUPs:

  $\_ . \_ : \overline{\mathrm{FUP}} \times \overline{\mathrm{FUP}} \rightarrow \overline{\mathrm{FUP}}$

  $$(F.G)(x) = \frac{(F(x)+G(x))^2 \dot{-} F(x)^2 \dot{-} G(x)^2}{2}$$
- Parificación de FUPs:

  $< \_, \_, \ldots, \_ >: \overline{\mathrm{FUP}}^n \rightarrow \overline{\mathrm{FUP}}$

  $< F_1, F_2, \ldots, F_n > (x) = \langle F_1(x), F_2(x), \ldots, F_n(x) \rangle$

Representabilidad de FUPs con FRPs

$\overline{\mathrm{FUP}} \dot{\subset} \overline{\mathrm{FRP}}$ es trivial

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{N} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\mathfrak{D}"'] & \mathbb{N} \arrow[d, "\mathfrak{D}"] \\
\mathbb{N} \arrow[r, "\mathfrak{P}(F)"'] & \mathbb{N}
\end{tikzcd}$$

$\mathfrak{D}(x) = x$

$\mathfrak{P} : \overline{\mathrm{FUP}} \to \overline{\mathrm{FRP}}$

$\mathfrak{P}\,\mathsf{S} = \sigma$

$\mathfrak{P}\,(F \dot{-} G) = \phi[\mathsf{Mon}, \mathfrak{P}\,F, \mathfrak{P}\,G]$

$\mathfrak{P}\,(F \circ G) = \phi[\mathfrak{P}\,F, \mathfrak{P}\,G]$

$\mathfrak{P}\,F^{\square} = \rho[\zeta, \phi[\mathfrak{P}\,F, \pi_2^2]]$

Representabilidad de FRPs con FUPs

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{N}^n \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\mathfrak{D}"'] & \mathbb{N} \arrow[d, "\mathfrak{D}"] \\
\mathbb{N} \arrow[r, "\mathfrak{P}(\varphi)"'] & \mathbb{N}
\end{tikzcd}
$$

$$\mathfrak{D}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$$

$$\mathfrak{P} : \overline{\mathrm{FRP}} \longrightarrow \overline{\mathrm{FUP}}$$

$$\mathfrak{P}\,\zeta = \mathsf{S} \dot{-} \mathsf{S}$$

$$\mathfrak{P}\,\sigma = \mathsf{S}$$

$$\mathfrak{P}\,\pi_i^n = \tau_i^n$$

$$\mathfrak{P}\,\phi[\varphi, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n]$$

$$= (\mathfrak{P}\,\varphi) \circ < \mathfrak{P}\,\omega_1, \mathfrak{P}\,\omega_2, \ldots, \mathfrak{P}\,\omega_n >$$

Reducción de la Recursión Primitiva

$$\mathfrak{P}\ \rho[\alpha, \beta] = \cdots V^{\square} \cdots$$

$$\mathscr{R} \begin{cases} F(x_1, \ldots, x_n, 0) = \alpha(x_1, \ldots, x_n), \\ F(x_1, \ldots, x_n, y+1) = \beta(x_1, \ldots, x_n, y, F(x_1, \ldots, x_n, y)), \end{cases}$$

$$\mathscr{R}_1 \begin{cases} F_1(x, 0) = A(x), \\ F_1(x, y+1) = B(x, y, F_1(x, y)), \end{cases}$$

$$\mathscr{R}_2 \begin{cases} F_2(x, 0) = C(x), \\ F_2(x, y+1) = D(y, F_2(x, y)), \end{cases}$$

$$\mathscr{R}_3 \begin{cases} F_3(x, 0) = x, \\ F_3(x, y+1) = E(y, F_3(x, y)), \end{cases}$$

$$\mathscr{R}_4 \begin{cases} F_4(0) = 0, \\ F_4(y+1) = U(y, F_4(y)), \end{cases} \qquad \mathscr{R}_5 \begin{cases} F_5(0) = 0, \\ F_5(y+1) = V(F_5(y)), \end{cases}$$

Reducción de la Recursión Primitiva

$$\mathfrak{P}\ \rho[\alpha, \beta] = \cdots V^{\square} \cdots$$

$$\mathscr{R} \begin{cases} F(x_1, \ldots, x_n, 0) = \alpha(x_1, \ldots, x_n), \\ F(x_1, \ldots, x_n, y+1) = \beta(x_1, \ldots, x_n, y, F(x_1, \ldots, x_n, y)), \end{cases}$$

$$\mathscr{R}_1 \begin{cases} F_1(x, 0) = A(x), \\ F_1(x, y+1) = B(x, y, F_1(x, y)), \end{cases}$$

$$\mathscr{R}_2 \begin{cases} F_2(x, 0) = C(x), \\ F_2(x, y+1) = D(y, F_2(x, y)), \end{cases}$$

$$\mathscr{R}_3 \begin{cases} F_3(x, 0) = x, \\ F_3(x, y+1) = E(y, F_3(x, y)), \end{cases}$$

$$\mathscr{R}_4 \begin{cases} F_4(0) = 0, \\ F_4(y+1) = U(y, F_4(y)), \end{cases} \qquad \mathscr{R}_5 \begin{cases} F_5(0) = 0, \\ F_5(y+1) = V(F_5(y)), \end{cases}$$

$$\boxed{\overline{\mathrm{FUP}} \doteq \overline{\mathrm{FRP}}}$$

Funciones Unarias Generales

1) $F \in \overline{\mathrm{FUP}} \implies F \in \overline{\mathrm{FUG}}$

Funciones Unarias Generales

1) $F \in \overline{\mathrm{FUP}} \implies F \in \overline{\mathrm{FUG}}$

2) $\_^{-} : \overline{\mathrm{FUG}} \to \overline{\mathrm{FUG}}$

$$F^{-}(x) = \min_{z \in \mathbb{N}} \{F(z) = x\}$$

Si F es biyectiva, F^{-} es su inversa

Funciones Unarias Generales

1) $F \in \overline{\mathrm{FUP}} \implies F \in \overline{\mathrm{FUG}}$

2) $\_^{-} : \overline{\mathrm{FUG}} \to \overline{\mathrm{FUG}}$

$F^{-}(x) = \min\limits_{z \in \mathbb{N}} \{F(z) = x\}$

Si F es biyectiva, F^{-} es su inversa

- $\overline{\mathrm{FUG}} \doteq \overline{\mathrm{FRG}}$

$\mathfrak{P}\ F^{-} = \mu\phi[\mathsf{Dist}, \phi[\mathfrak{P}\ F, \pi^2_2], \pi^2_1]$

Funciones Unarias Generales

1) $F \in \overline{\mathrm{FUP}} \implies F \in \overline{\mathrm{FUG}}$

2) $\_^{-} : \overline{\mathrm{FUG}} \to \overline{\mathrm{FUG}}$

$$F^{-}(x) = \min_{z\in\mathbb{N}}\{F(z) = x\}$$

Si F es biyectiva, F^{-} es su inversa

- $\overline{\mathrm{FUG}} \doteq \overline{\mathrm{FRG}}$

$$\mathfrak{P}\ F^{-} = \mu\phi[\text{Dist}, \phi[\mathfrak{P}\ F, \pi^2_2], \pi^2_1]$$

- *Cualquier función recursiva con un argumento natural puede ser escrita como*

$A \circ B^{-}$ donde $A, B \in \overline{\mathrm{FUP}}$

Reducción de la minimización

$$\mathfrak{P}\ \mu\varphi = \cdots H^{-} \cdots$$

$$\mathscr{M}: \quad F(x_1, \ldots, x_n) = \min_{y \in \mathbb{N}} \{\varphi(x_1, \ldots, x_n, y) = 0\}$$

$$\hat{\mathscr{M}}: \quad \hat{F}(x) = \min_{y \in \mathbb{N}} \{G(x, y) = 0\}$$

$$\hat{\hat{\mathscr{M}}}: \quad \hat{\hat{F}}(x) = \min_{z \in \mathbb{N}} \{H(z) = x\}$$

Reducción de la minimización

$$\mathfrak{P}\ \mu\varphi = \cdots H^{-} \cdots$$

$$\mathscr{M}\ :\quad F(x_1,\ldots,x_n) = \min_{y\in\mathbb{N}}\{\varphi(x_1,\ldots,x_n,y)=0\}$$

$$\hat{\mathscr{M}}\ :\quad \hat{F}(x) = \min_{y\in\mathbb{N}}\{G(x,y)=0\}$$

$$\hat{\hat{\mathscr{M}}}\ :\quad \hat{\hat{F}}(x) = \min_{z\in\mathbb{N}}\{H(z)=x\}$$

- $\hat{\mathscr{M}} \to \hat{\hat{\mathscr{M}}}$: Dada G hay que hallar $\hat{F}$.

$$\hat{F}(x) = \tau_2^2(\hat{\hat{F}}(x+1))$$

$$\hat{\hat{F}}(x+1) = \min_{z\in\mathbb{N}}\{(\tau_1^2(z)+1).(1 \dot{-} G(\tau_1^2(z),\tau_2^2(z))) = x+1\}$$

Reducción de la minimización

$$\mathfrak{P}\ \mu\varphi = \cdots H^{-} \cdots$$

$$\mathscr{M}: \quad F(x_1, \ldots, x_n) = \min_{y \in \mathbb{N}} \{\varphi(x_1, \ldots, x_n, y) = 0\}$$

$$\hat{\mathscr{M}}: \quad \hat{F}(x) = \min_{y \in \mathbb{N}} \{G(x, y) = 0\}$$

$$\hat{\hat{\mathscr{M}}}: \quad \hat{\hat{F}}(x) = \min_{z \in \mathbb{N}} \{H(z) = x\}$$

- $\hat{\mathscr{M}} \to \hat{\hat{\mathscr{M}}}$: Dada G hay que hallar $\hat{F}$.

$$\hat{F}(x) = \tau_2^2(\hat{\hat{F}}(x+1))$$

$$\hat{\hat{F}}(x+1) = \min_{z \in \mathbb{N}} \{(\tau_1^2(z)+1).(1 \dot{-} G(\tau_1^2(z), \tau_2^2(z))) = x+1\}$$

- Si $z = \langle x, y \rangle$ entonces $x = \tau_1^2(z),\ y = \tau_2^2(z)$

$$G(x,y) \neq 0 \implies (x+1).(1 \dot{-} G(x,y)) = 0$$

$$G(x,y) = 0 \implies (x+1).(1 \dot{-} G(x,y)) = x+1$$

Reducción de la minimización

$$\mathfrak{P}\ \mu\varphi = \cdots H^{-} \cdots$$

$$\mathscr{M}: \quad F(x_1,\ldots,x_n) = \min_{y\in\mathbb{N}}\{\varphi(x_1,\ldots,x_n,y) = 0\}$$

$$\hat{\mathscr{M}}: \quad \hat{F}(x) = \min_{y\in\mathbb{N}}\{G(x,y) = 0\}$$

$$\hat{\hat{\mathscr{M}}}: \quad \hat{\hat{F}}(x) = \min_{z\in\mathbb{N}}\{H(z) = x\}$$

- $\hat{\mathscr{M}} \to \hat{\hat{\mathscr{M}}}$: Dada G hay que hallar $\hat{F}$.

$$\hat{F}(x) = \tau_2^2(\hat{\hat{F}}(x+1))$$

$$\hat{\hat{F}}(x+1) = \min_{z\in\mathbb{N}}\{(\tau_1^2(z)+1).(1 \dot{-} G(\tau_1^2(z),\tau_2^2(z))) = x+1\}$$

- Si $z = \langle x, y\rangle$ entonces $x = \tau_1^2(z),\ y = \tau_2^2(z)$

$$G(x,y) \neq 0 \implies (x+1).(1 \dot{-} G(x,y)) = 0$$

$$G(x,y) = 0 \implies (x+1).(1 \dot{-} G(x,y)) = x+1$$

- y mínima le corresponde z mínima por la propiedad de monotonía: $\langle x, y\rangle < \langle x, y+1\rangle$

Bibliografía

- Libros:

  - S. C. Kleene. *Introduction to Metamathematics*.
  - R. L. Goodstein. *Recursive Number Theory*.

Bibliografía

- Libros:
  - S. C. Kleene. *Introduction to Metamathematics*.
  - R. L. Goodstein. *Recursive Number Theory*.
- Artículos:
  - R. M. Robinson. *Primitive Recursive Functions*.
  - J. Robinson. *General Recursive Functions*.
  - M. D. Gladstone. *Simplifications of the Recursion Scheme*.
  - N. Georgieva. *Another Simplification of the Recursion Scheme*.

Bibliografía

- Libros:
  - S. C. Kleene. *Introduction to Metamathematics*.
  - R. L. Goodstein. *Recursive Number Theory*.
- Artículos:
  - R. M. Robinson. *Primitive Recursive Functions*.
  - J. Robinson. *General Recursive Functions*.
  - M. D. Gladstone. *Simplifications of the Recursion Scheme*.
  - N. Georgieva. *Another Simplification of the Recursion Scheme*.
- Posteriormente:
  - D. E. Severin. *Unary Primitive Recursive Functions*.